TD28 Correction

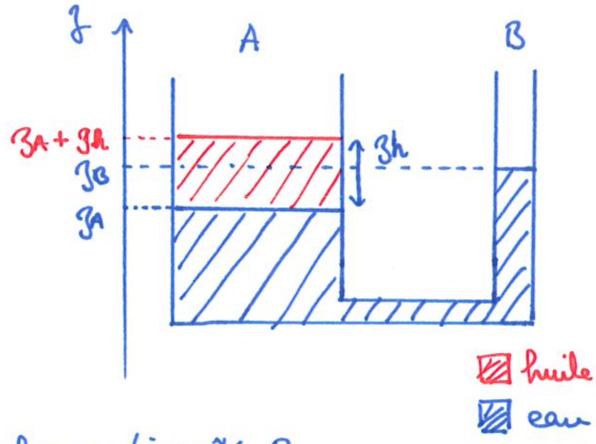
Exercice 1

1. D'après l'équation fondamentale de la statique dans un champ de pesanteur uniforme

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \rho_{eau}\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho_{eau}g \quad \text{selon } \vec{e_z} \text{ où } \vec{g} = -g\vec{e_z}$$

Le champ de pression dans l'eau ne dépend que de z. Donc tout point à la même altitude est à la même pression.

Or la surface libre (interface eau/air) est à l'équilibre, il y a donc égalité des pressions à cette interface. La pression ambiante étant uniforme à P_0, la surface libre est donc une surface isobare dans l'eau à P_0, donc un plan horizontal à une altitude constante.



2. On applique l'équation fondamentale de la statique pour déterminer le champ de pression dans l'eau :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{eau}g \Rightarrow P(z) = -\rho_{eau}gz + K$$

or $P(z_B) = P_0$ car égalité des pressions à l'interface eau/air côté B.

donc $-\rho_{eau}gz_B + K = P_0 \Rightarrow K = P_0 + \rho_{eau}gz_B$

et alors $P(z) = P_0 + \rho_{eau}g(z_B - z)$

On peut déterminer le champ de pression dans l'huile de la même manière :

$$\frac{dP'}{dz} = -\rho_{huile}g \Rightarrow P'(z) = -\rho_{huile}gz + K'$$

or $P'(z_A + z_h) = P_0$ (égalité des pressions à l'interface huile/air côté A)

d'où $P'(z) = P_0 + \rho_{huile}g(z_A + z_h - z)$

Enfin, l'égalité des pressions à l'interface eau/huile côté A s'écrit :

$$P(z_A) = P'(z_A)$$

$$\Rightarrow \quad P_0 + \rho_{eau}\, g (z_B - z_A) = P_0 + \rho_{huile}\, g (z_A + z_h - z_A)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{eau} (z_B - z_A) = \rho_{huile}\, z_h$$

or $z_h = \dfrac{V}{S_A}$, d'où $\underline{z_B - z_A = \dfrac{\rho_{huile}}{\rho_{eau}} \dfrac{V}{S_A}}$

AN : $z_B - z_A = \dfrac{0{,}9}{1{,}0} \cdot \dfrac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-4}} \simeq \underline{4{,}5 \text{ cm}}$

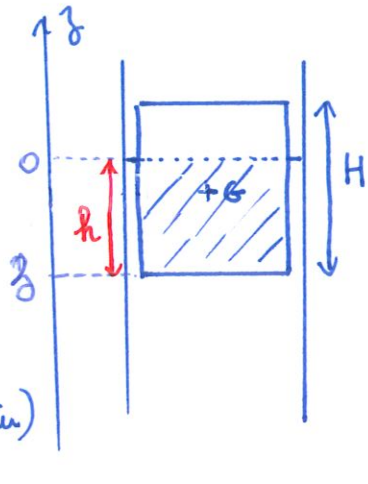
3. On aurait réalisé le même raisonnement, en inversant A et B.

on obtient alors : $\underline{z_A - z_B = \dfrac{\rho_{huile}}{\rho_{eau}} \cdot \dfrac{V}{S_B}}$

AN : $z_A - z_B = \underline{18 \text{ cm}}$

Rq : comme le volume d'huile est le même dans les deux cas, quand l'huile est placé à droite (en B), le poids du volume V d'huile est le même mais la pression exercée sur l'eau est plus importante car la surface sur laquelle s'applique le poids est plus faible. Cela explique que $|z_B - z_A|$ soit plus important dans le second cas que dans le premier.

Exercice 2



1. On cherche h la hauteur du bouchon immergée.

À l'équilibre, seules deux forces s'équilibrent (s'appliquant sur le bouchon)

→ poids : $\vec{P} = H s \rho_{eau} d_l\, \vec{g}$

→ poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -h s\, \rho_{eau}\, \vec{g}$ (on néglige la poussée d'Archimède due à l'air)

Alors à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{\Pi}_A = \vec{0}$

selon $\vec{e_z}$: $-HS\rho_{eau}d_\ell g + hS\rho_{eau}g = 0$

$\Rightarrow \underline{h = d_\ell H}$ AN : $\underline{h = 1{,}3\text{ cm}}$

2. À l'équilibre précédent s'ajoute la force de la pièce sur le bouchon, qui est égale au poids de la pièce :

$$\vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{P}_{pièce} = \vec{0}$$

selon $\vec{e_z}$: $-HS\rho_{eau}d_\ell g + h'S\rho_{eau}g - mg = 0$

$\Rightarrow \underline{h' = \dfrac{m}{S\rho_{eau}} + d_\ell H}$ AN : $\underline{h' = 2{,}8\text{ cm}}$

3. On négligera ici la variation du niveau d'eau lors du mouvement du bouchon.
On note z l'altitude du bas du bouchon de liège, et on choisit $z = 0$ l'origine des z lorsque le bas du bouchon est en contact avec la surface de l'eau.

Bilan des actions : $\rightarrow$ poids : $\vec{P} = -HS\rho_{eau}d_\ell g\,\vec{e_z}$

$\rightarrow$ poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = \underbrace{-zS}_{\text{volume immergé}}\rho_{eau}g\,\vec{e_z}$ (avec $z<0$ car le bouchon sera supposé constamment immergé)

Le théorème de la qté de mouvement s'écrit, selon $\vec{e_z}$:

$$\underbrace{HS\rho_{eau}d_\ell}_{\text{masse du bouchon}} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = -HS\rho_{eau}d_\ell g - zS\rho_{eau}g$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g}{d_\ell H}z = -g}$$

En posant $\underline{\omega_0^2 = \dfrac{g}{d_\ell H}}$, on obtient $\underline{\dfrac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g}$ On obtient l'éq^n diff. d'un oscillateur harmonique.

Le bouchon oscille bien, autour de la position d'équilibre correspondant à la solution particulière constante de l'éq^{n} différentielle : $z_{eq} = -d_\ell H = -h$ (on retrouve bien la position d'équilibre de la question 1).

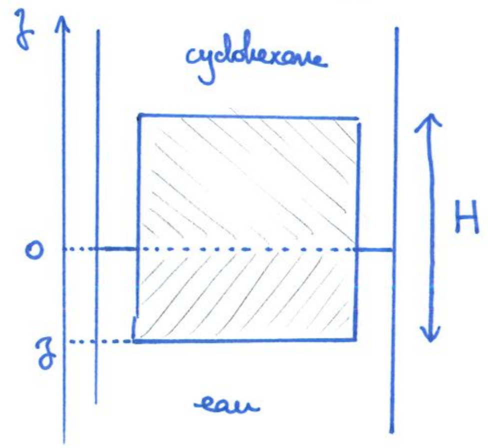
La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{d_\ell H}{g}}}$

AN : $\underline{T_0 \simeq 0{,}22\,s}$

4. Dans l'éprouvette, comme $d_{cy} < 1$, l'eau se situera sous le cyclohexène.

Or, comme $d_{cy} < d_c < 1$, la cheville de chêne se situera à l'interface entre le cyclohexène et l'eau

($d_{cy} < d_c$ → le chêne "coule" dans le cyclohexène
$d_c < 1$ → le chêne flotte dans l'eau)



Bilan des actions sur le bouchon :

→ poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = \underbrace{\overbrace{-zS}^{\text{volume immergé dans l'eau}}\rho_{eau}\, g\, \vec{e}_z}_{\text{dans l'eau}} + \underbrace{\overbrace{(H+z)S}^{\text{volume immergé dans le cyclohexène}}\rho_{eau}\, d_{cy}\, g\, \vec{e}_z}_{\text{dans le cyclohexène}}$

$(z \leq 0)$

→ poids : $\vec{P} = -HS\rho_{eau}\, d_c\, g\, \vec{e}_z$

Le théorème de la quantité de mouvement donne selon $\vec{e}_z$:

$$HS\rho_{eau}\, d_c \frac{d^2z}{dt^2} = -HS\rho_{eau}\, d_c\, g - zS\rho_{eau}\, g + (H+z)S\rho_{eau}\, d_{cy}\, g$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g}{d_c H}(1-d_{cy})\, z = -g + \frac{d_{cy}}{d_c} g = g\left(\frac{d_{cy}}{d_c} - 1\right)}$$

On pose $\underline{\omega_0'^2 = \frac{g}{d_c H}(1-d_{cy})}$ pour obtenir : $\underline{\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0'^2 z = g\left(\frac{d_{cy}}{d_c} - 1\right)}$

c'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Le bouchon oscille autour de la position d'équilibre :

$$z_{éq} = H \cdot \frac{d_{cy} - d_c}{1 - d_{cy}} = -h'$$ où h' serait la hauteur immergée dans l'eau à l'équilibre.

La période d'oscillation est $T_0' = 2\pi \sqrt{\frac{d_c H}{g(1-d_{cy})}}$ AN : $T_0' = 0,48\,s$

Rq : ici, nous avons supposé que le théorème d'Archimède reste valable, alors que le système est en mouvement (le fluide n'est alors plus statique). Cela reste satisfaisant si l'on considère que le mouvement du fluide reste "lent".

Exercice 3

1. On applique l'équation fondamentale de la statique dans le cas d'un fluide dans un champ de pesanteur uniforme.

$$\overrightarrow{grad}\, P = \rho \vec{g} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{où } \vec{g} = -g\vec{e_z}$$

Or en considérant l'atmosphère comme un gaz parfait, on peut utiliser l'équation d'état des gaz parfaits :

(pour une qté n de gaz parfait) : $PV = nRT = \frac{mRT}{M}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\Pi}$$

Si l'on considère l'atmosphère comme isotherme, alors $\frac{P}{\rho} = cste = \frac{RT}{\Pi}$

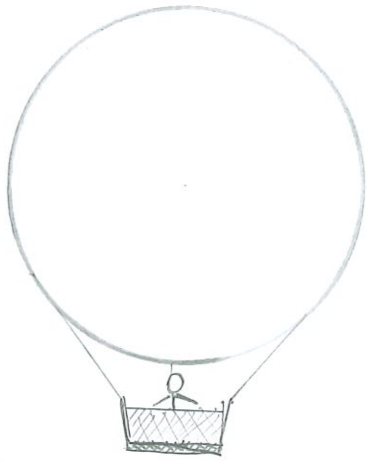
et alors $\frac{dP}{dz} = -\frac{P\Pi g}{RT} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\Pi g}{RT} dz$

on intègre entre $z=0$ et z courant :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{\Pi g}{RT} dz \Rightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{\Pi g z}{RT}$$

alors : $P(z) = P_0 \exp\left[-\frac{Mgz}{RT}\right]$

2. Au départ, les forces qui s'appliquent sur la montgolfière sont :



→ poids : $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$

→ poussée d'Archimède : $\vec{\Pi_A} = +\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{air}\, g\vec{e_z}$

Pour que la montgolfière décolle, il faut que la somme des forces soit selon $+\vec{e_z}$. Dans ce cas, la force ascensionnelle est $\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi_A}$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{air} - m\right) g\vec{e_z}$$

Ainsi la montgolfière décolle si $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{air} - m > 0$

or à l'instant initial (en $z=0$), $P(z=0) = P_0$ donc $\rho_{air} = \frac{P_0 M}{RT}$

La condition s'écrit : $\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{P_0 M}{RT} > m$ soit $m < m_{lim}$ où $m_{lim} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{P_0 M}{RT}$

AN: $m_{lim} = \frac{4}{3}\pi 5^3 . \frac{10^5 . 29.10^{-3}}{8,314 \times 290} \simeq 630\ kg$

On a bien $m < m_{lim}$, la montgolfière décolle.

3. L'altitude plafond est atteinte lorsque la force ascensionnelle s'annule, donc lorsque $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{air}(z_{max}) - m = 0$

où $\rho_{air}(z_{max}) = \frac{P(z_{max}) M}{RT} = \frac{P_0 M}{RT}\exp\left[-\frac{Mgz_{max}}{RT}\right]$

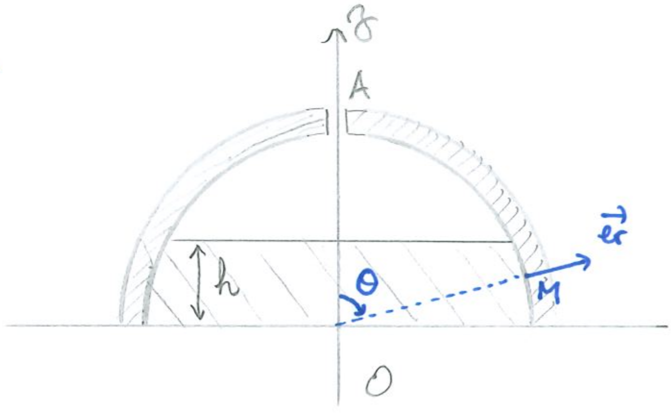
D'où $\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{P_0 M}{RT}\exp\left[-\frac{Mgz_{max}}{RT}\right] = m \Rightarrow m_{lim}\exp\left[-\frac{Mgz_{max}}{RT}\right] = m$

Finalement : $z_{max} = \frac{RT}{Mg} \ln\left(\frac{m_{lim}}{m}\right)$

AN : $z_{max} = \frac{8{,}31 \times 290}{29.10^{-3} \times 9{,}8} \ln\left(\frac{630}{600}\right) \simeq 410\,m$ (2 chiffres significatifs)

Exercice 4

1. Déterminons d'abord le champ de pression dans le fluide :



(coordonnées sphériques)

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$

or si $P(h) = P_0$ (égalité avec pression ambiante)

alors $P(z) = P_0 + \mu g(h-z)$

* Force élémentaire de pression appliquée à dS en M :

$$d^2\vec{F} = P(z)d^2S\vec{e_r} - \underbrace{P_0 d^2S\vec{e_r}}_{\text{force due à l'air extérieur}} = \mu g(h-z)d^2S\vec{e_r}$$

Rq : si l'on néglige les effets de la pression atmosphérique, cela revient à considérer $P_0 = 0$. (on retrouve le même résultat.)

avec $d^2S = Rd\theta \times R\sin\theta\, d\varphi$ en coordonnées sphériques.

* Calcul de la résultante :

→ intégration selon φ : on intègre à θ = cste, ce qui donne la force qui s'exerce sur une couronne. Pour cela, φ varie de 0 à 2π

Or $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_z} + \sin\theta\,\vec{u}$, $\vec{u}$ vecteur unitaire dans le plan (Oxy)

et, par symétrie, la composante dans le plan (Oxy) va être nulle par intégration.

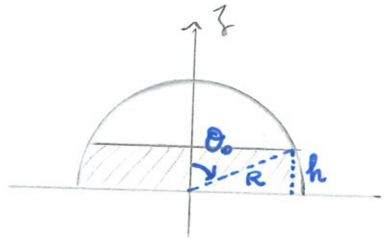
Car deux à deux, les composantes des forces élémentaires en φ et $\varphi+\pi$ s'annulent.

ainsi $d\vec{F} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mu g(h-z) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \cos\theta \, \vec{e_z}$

$= 2\pi \mu g (h-z) \sin\theta \cos\theta \cdot R^2 d\theta \, \vec{e_z}$

→ intégration selon θ : on intègre de $\theta = \theta_0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$

où θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \frac{h}{R}$



avec ⚠ $z = R\cos\theta$

$$\vec{F} = \int_{\theta=\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2 \mu g (h - R\cos\theta) \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, \vec{e_z}$$

$$= \left(2\pi R^2 \mu g h \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta - 2\pi R^3 \mu g \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \right) \vec{e_z}$$

$$= \left(2\pi R^2 \mu g h \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi R^3 \mu g \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\right) \vec{e_z}$$

$$= 2\pi R^2 \mu g \left(\frac{h}{2}\cos^2\theta_0 - \frac{R}{3}\cos^3\theta_0\right) \vec{e_z}$$

car $\cos\theta_0 = \frac{h}{R}$

$$= 2\pi R^2 \mu g \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{h^2}{R^2} - \frac{R}{3} \cdot \frac{h^3}{R^3}\right) \vec{e_z}$$

D'où $\vec{F} = \mu g \cdot \frac{\pi h^3}{3} \vec{e_z}$

Rq : on aurait pu intégrer sur z au lieu d'intégrer sur θ

avec $z = R\cos\theta \Rightarrow dz = -R\sin\theta \, d\theta$

et alors $d\vec{F} = -2\pi \mu g (h-z) z \, dz \, \vec{e_z}$ (à intégrer de $z=h$ à $z=0$)

2. Déterminons le poids de la demi-sphère :

$\vec{P} = -\mu_1 V g \vec{e_z}$ où $V = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 \cdot e$

$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(R+e)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3\right)$

$\simeq \frac{1}{2}\left(4\pi R^2 e\right)$ à l'ordre 1 en e