TD27 – **Phénomènes d'induction**

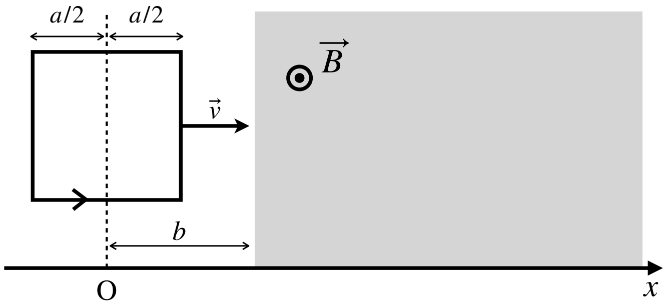
EXERCICE 1 : Spire dans un champ variable (⋆)

On considère une spire circulaire métallique, de rayon a, de résistance R et d'axe de révolution (Oz). On place un champ magnétique sinusoïdal de la forme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$ uniforme.

1. Calculer le flux du champ magnétique à travers cette spire. On choisira l'orientation du circuit.
2. Calculer alors la force électromotrice dans la spire.
3. En déduire le courant induit dans la spire.
4. En considérant que le champ induit créé est proportionnel au produit du courant induit et du vecteur normal à la spire, interpréter qualitativement avec la loi de modération de Lenz.

EXERCICE 2 : Cadre volant (⋆)

On considère un cadre métallique carré de côté a, en translation rectiligne uniforme selon l'axe (Ox) à la vitesse v. Ce cadre rencontre à un moment une région de l'espace dans laquelle règne un champ magnétique uniforme orthogonal au plan du cadre. On note b la distance entre le milieu du cadre et la région où règne le champ magnétique à l'instant initial.

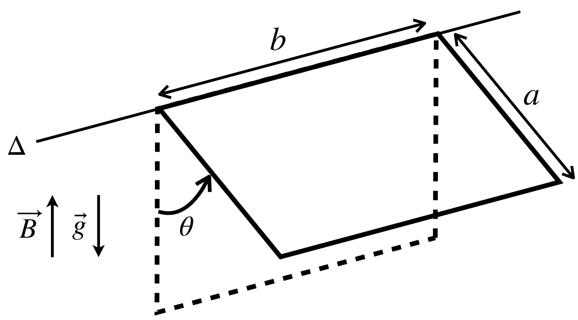


On a représenté la situation sur le schéma ci-dessous avec l'orientation du cadre.

1. En distinguant trois cas, exprimer le flux du champ magnétique à travers le cadre en fonction du temps. On considérera que le circuit reste à la vitesse v grâce à un système non représenté sur le schéma.
2. On considère dans cette question que le champ est permanent de norme B_0. Calculer la force électromotrice dans le circuit. En déduire le courant induit dans le circuit en notant R la résistance électrique du circuit.
3. Représenter sur un même graphique le flux magnétique et le courant induit au cours du temps.

EXERCICE 3 : Cadre oscillant (⋆)

Un cadre conducteur tourne sans frottement autour de l'axe Δ. Il est composé de 4 segments, 2 de longueur a, 2 de longueur b. La masse totale du cadre est m, son moment d'inertie par rapport à Δ est J, sa résistance électrique est R et son inductance propre est négligée.



Les champs magnétique et de pesanteur sont supposés uniformes et constants. On écarte le cadre de sa position d'équilibre verticale (repérée en pointillés sur le schéma) d'un angle θ_0 puis on le lache sans vitesse initiale.

1. Orienter l'axe Δ en conformité avec l'orientation de θ.
2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $\theta(t)$. La linéariser.

3. Tracer l'allure de $\theta(t)$. Discuter en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement.

EXERCICE 4 : Chauffage par induction ($\star$)

Le chauffage par induction est beaucoup utilisé dans nos foyers avec les plaques de cuisson dites « à induction » mais également dans l'industrie pour chauffer fortement des matériaux afin de les ramollir ou les faire fondre. Nous présentons ici le chauffage par induction d'un anneau métallique placé dans une bobine.

On place un anneau métallique assimilé à une spire de rayon $r = 2,5\,\text{cm}$ et de résistance $R = 0,1\,\Omega$ dans la bobine que l'on considérera comme infiniment longue possédant une densité linéique de spire n. On alimente la bobine par un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. La bobine et l'anneau ont le même axe de révolution (Oz).
Le champ à l'intérieur de la bobine infiniment longue vaut $\vec{B} = \mu_0 n i(t)\vec{e}_z$ où on a orienté l'axe (Oz) par rapport au sens du courant dans la bobine.

1. Calculer le flux magnétique à travers l'anneau.
2. En déduire la force électromotrice induite ainsi que le courant induit. On négligera l'auto-induction dans ce cas.
3. Exprimer la puissance dissipé par effet Joule dans l'anneau en fonction du temps.
4. En déduire la puissance dissipée en moyenne.
5. Sachant que la bobine possède 200 spires par mètre et que l'on alimente avec une fréquence de $100\,\text{kHz}$, calculer l'amplitude du courant I_0 nécessaire pour chauffer avec une puissance de $500\,\text{W}$ dans l'anneau.
6. Sachant que la capacité calorifique du cuivre est de $385\,\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et que la température de fusion est de 1085°C, combien de temps faut-il chauffer l'anneau de cuivre de $20\,\text{g}$ pour qu'il fonde ? On négligera toute perte thermique et on donnera ainsi une durée de chauffe minimale.

EXERCICE 5 : Bobine autour d'un solénoïde ($\star\star$)

On considère une bobine métallique de rayon b, de longueur ℓ_2 comprenant N_2 spires, qui entoure un solénoïde de rayon $a < b$. Le solénoïde possède N_1 spires sur une longueur ℓ_1 et est alimenté par un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = i_0\cos(\omega t)$. Les deux circuits sont concentriques d'axe (Oz). Le champ créé par le solénoïde est uniforme et vaut $\vec{B} = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i(t)\vec{e}_z$ à l'intérieur et est nul à l'extérieur.

1. Calculer l'inductance mutuelle M entre ces deux circuits.
2. La bobine de résistance R est parcourue par un courant $i_2(t)$. Justifier que l'on puisse négliger l'inductance propre L_2 par rapport à M si l'on a $N_2 \ll N_1$. Déterminer alors le courant i_2.
On rappelle que l'inductance de la bobine s'exprime : $L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell_2}\pi a^2$.

EXERCICE 6 : Spire en rotation – Freinage par induction ($\star\star$)

Une spire circulaire de surface S est en rotation, à la vitesse angulaire constante ω, autour d'un de ses diamètres, qui constitue l'axe Δ. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, orthogonal à Δ.

1. Établir l'expression de la fem induite e dans la spire.
2. Sachant que R est la résistance électrique de la spire, établir l'expression du moment magnétique de la spire.
3. En déduire le couple de Laplace instantané, puis moyen, qui s'exerce sur la spire.

EXERCICE 7 : Détection par boucle inductive (⋆ ⋆ ⋆)

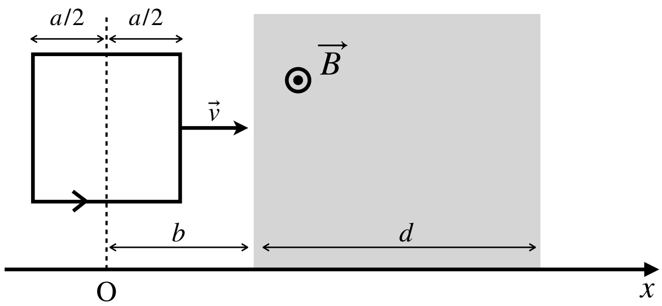
Cet exercice a pour objectif l'étude du principe de la détection d'une voiture, en la couplant par inductance mutuelle à un circuit oscillant au sein duquel circule un courant sinusoïdal.

Soit $\mathscr{S}_1$ le circuit détecteur, modélisé par un générateur délivrant une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω, un condensateur de capacité C et un bobinage de résistance R_1 et d'inductance propre L_1. Soit $\mathscr{S}_2$ la partie inférieure de la carcasse métallique d'une voiture, que l'on modélise par un circuit fermé de résistance R_2 et d'inductance propre L_2. Lorsque la voiture s'approche du détecteur, des courants de Foucault apparaissent dans la carcasse de la voiture et $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ se couplent par induction ; on note alors M leur coefficient d'induction mutuelle.

1. À quelles conditions sur les paramètres du circuit peut-on négliger les résistances R_1 et R_2 ? On pourra passer en RSF pour étudier le système. Nous supposerons cette condition réalisée dans la suite.
2. Soient $u_1(t)$ la tension aux bornes du bobinage de $\mathscr{S}_1$ et $i_1(t)$ le courant qui le traverse. Montrer que ces deux grandeurs sont liées par une relation du type : $u_1(t) = L_1(1-K)\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$. Déterminer l'expression du coefficient K et interpréter cette relation.
3. Retrouver ce résultat par une étude directe du circuit en notation complexe. Montrer l'existence d'un phénomène de résonance en intensité dans le circuit $\mathscr{S}_1$, dont on exprimera la pulsation propre.
4. Exprimer la variation relative de fréquence propre du circuit $\mathscr{S}_1$ due à la présence de la voiture. Quelle est sa valeur maximale ? S'en rapproche-t-on à votre avis ?

EXERCICE 8 : Cadre freiné (⋆⋆)

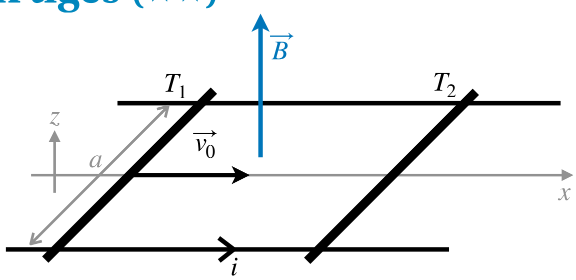
On considère un cadre métallique de côté a, de masse m et de résistance R (d'auto-inductance négligeable) en translation selon l'axe (Ox). Il traverse une région de l'espace de longueur $d > a$ avec un champ magnétique uniforme selon (Oz) : $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Le champ magnétique est nul à l'extérieur. On note $x(t)$ la position du centre du cadre et $v(t)$ sa vitesse (horizontale).



1. Déterminer l'équation sur la vitesse du cadre v en fonction de la position de celui-ci.
2. En déduire la vitesse pour tout x. Le cadre est lancé avec une vitesse v_0.
3. Quelle est la diminution de vitesse entre l'entrée et la sortie de la région ? Dans quel cas le cadre ne ressort pas de la région ?
4. Interpréter le résultat.

EXERCICE 9 : Interaction entre deux tiges (⋆⋆)

Deux tiges T_1 et T_2 identiques, de masse m, chacune de résistance électrique $R/2$, sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles horizontaux espacés d'une distance a. La résistance électrique des rails est négligeable devant R ; l'inductance propre du circuit est négligée.



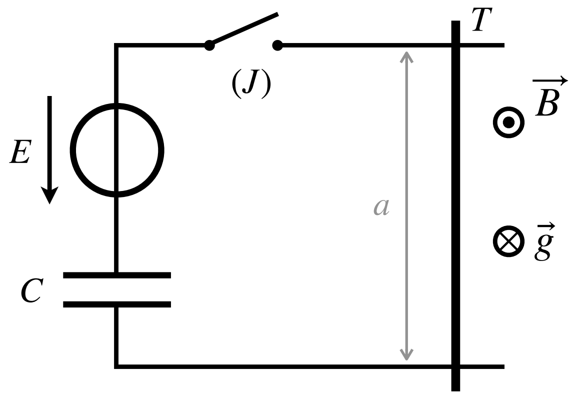
L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Initialement, T_2 est immobile et T_1 se déplace vers T_2 avec la vitesse v_0. Les deux tiges restent parallèles à $\vec{e}_y$ lors de leur mouvement.

1. Expliquer sans calcul pourquoi la tige T_1 ralentit alors que la tige T_2 se met en mouvement.
2. Établir une équation électrique reliant $i(t)$, intensité du courant dans le système, à $v_1(t)$ et $v_2(t)$, composantes des vitesses des tiges selon $\vec{e}_x$. Établir aussi deux équations mécaniques.
3. Établir un système d'équations différentielles couplées sur $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
4. Découpler et intégrer le système différentiel en utilisant les fonctions somme $\sigma(t) = v_1(t)+v_2(t)$ et différence $\delta(t) = v_1(t)-v_2(t)$. Représenter graphiquement sur un même schéma $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
5. Calculer l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans les deux tiges.
6. Calculer, en utilisant $i(t)$, l'énergie E_J dissipée par effet Joule entre $t = 0$ et $t \to \infty$.
7. Calculer la variation ΔE_m d'énergie mécanique du système entre $t = 0$ et $t \to \infty$.

EXERCICE 10 : Tige glissant sur un circuit capacitif ($\star$)

Une tige conductrice T glisse sur deux rails horizontaux distants de a. Elle ferme électriquement un circuit comprenant un interrupteur (J), un condensateur de capacité C et un générateur de f.e.m. constante E. La tige T a une résistance électrique R et une masse m. L'autoinductance du circuit sera négligée.
L'ensemble est plongé dans des champ magnétique et de pesanteur uniformes et stationnaires. On ferme à l'instant initial l'interrupteur (J) alors que la tige T est immobile.



1. Établir une équation électrique et une équation mécanique décrivant le circuit.
2. Établir et intégrer une équation différentielle sur l'intensité du courant dans le circuit pour montrer qu'il s'écrit sous la forme : $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$.
3. En déduire que la vitesse $v(t)$ de la tige se met sous la forme : $v(t) = v_0(1-\exp(-t/\tau))$.
4. Calculer l'énergie E_G fournie par le générateur entre les instants initial $t = 0$ et final $t \to \infty$, en fonction de E, τ et R.
5. Calculer $u_C(t)$, la tension aux bornes du condensateur.
6. Calculer l'énergie E_e emmagasinée par le condensateur entre les instants initial et final.
7. Calculer l'énergie E_J dissipée par effet Joule entre les instants initial et final.
8. Calculer le travail W des forces de Laplace entre les instants initial et final.
9. Quelle relation existe-t-il entre E_G, E_e, E_J et W ? L'interpréter.