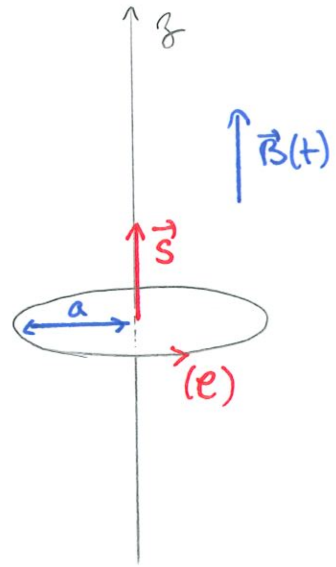
Correction TD27

Exercice 1

1. Avant tout, il faut orienter le circuit.



On choisit arbitrairement l'orientation du circuit $(\mathcal{C})$.
Ce choix impose le sens de $\vec{S}$ (donné par la règle de la main droite).

Alors $\phi = \vec{B}.\vec{S}$ avec $\vec{S} = S.\vec{e_z}$ et $S = \pi a^2$

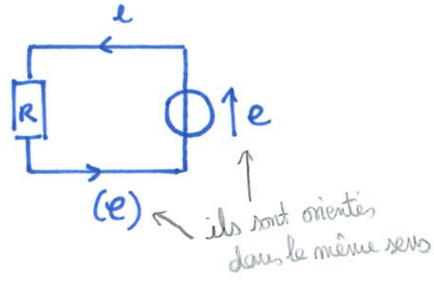
car $\vec{B}$ uniforme sur la surface de $(\mathcal{C})$

Donc $\phi = B.S = B_0 S \cos(\omega t)$

2. La loi de Faraday donne : $e = -\dfrac{d\phi}{dt} = B_0 S \omega \sin(\omega t)$

avec e orienté dans le sens de $(\mathcal{C})$.

3. On fait le schéma équivalent du circuit :

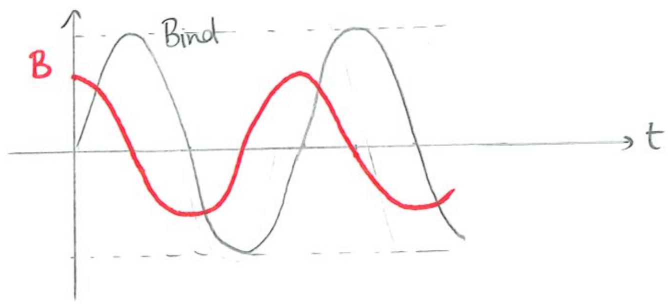


alors la loi des mailles donne : $Ri = e$

d'où $i(t) = \dfrac{e}{R} = \dfrac{B_0 S \omega}{R} \sin(\omega t)$

4. D'après l'énoncé : $\vec{B}_{ind} \propto i(t).\vec{e_z} = \dfrac{B_0 S \omega}{R} \sin(\omega t) \vec{e_z}$

$\vec{B}_{ind}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires mais en quadrature de phase.

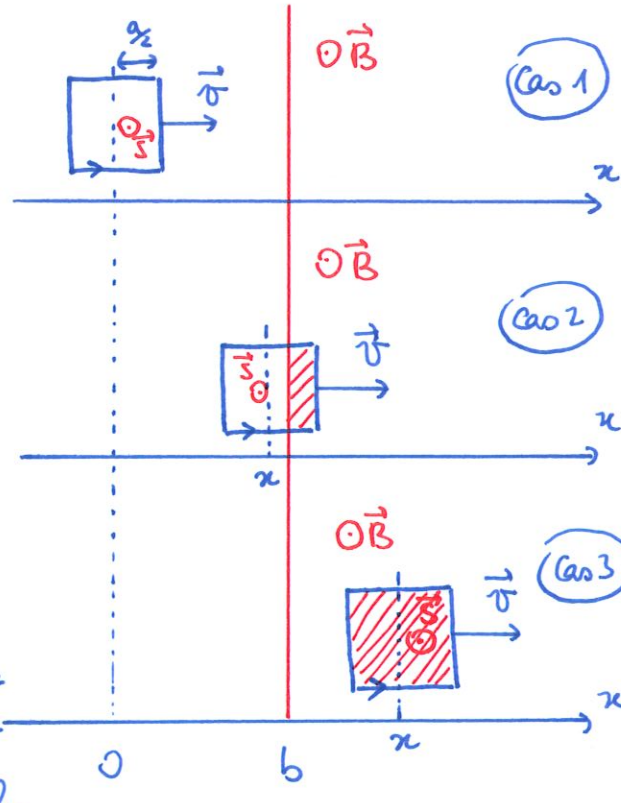


Lorsque l'intensité de B décroît, le champ induit Bind est positif et compense cette décroissance. De même, si B croît, alors Bind est négatif pour compenser la croissance.
Cela illustre la loi de Lenz.

Exercice 2

Compte tenu l'orientation du circuit, cela impose l'orientation de $\vec{S}$.

1. On distingue 3 cas de figure :



Cas 1 Le cadre est en dehors du champ magnétique $\vec{B}$, soit $\underline{x \leq b - \frac{a}{2}} \Leftrightarrow \underline{t \leq \frac{b - \frac{a}{2}}{v}}$

alors $\underline{\Phi = 0}$ car le champ magnétique traversant le cadre est nul.

Cas 2 Le cadre est à cheval entre la zone de droite et la zone sans champ magnétique.
soit $\underline{b - \frac{a}{2} \leq x \leq b + \frac{a}{2}} \Leftrightarrow \underline{\frac{b - \frac{a}{2}}{v} \leq t \leq \frac{b + \frac{a}{2}}{v}}$

alors seule la surface hachurée est traversée par le champ $\vec{B}$.

alors $\Phi = B.\left(a \cdot \left(x + \frac{a}{2} - b\right)\right) = \underline{Ba\left(x + \frac{a}{2} - b\right)}$ où $x(t)$ position du cadre.

Cas 3 Le cadre est intégralement dans la zone de droite, soit $\underline{x \geq b + \frac{a}{2}} \Leftrightarrow \underline{t \geq \frac{b + \frac{a}{2}}{v}}$

alors $\underline{\Phi = B.a^2}$

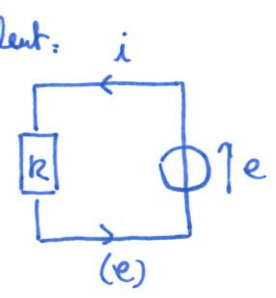
2. On détermine l'expression de fem induite grâce à la loi de Faraday :

Cas 1 : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{0}$

Cas 2 : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{-Bav}$

Cas 3 : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{0}$

schéma équivalent :



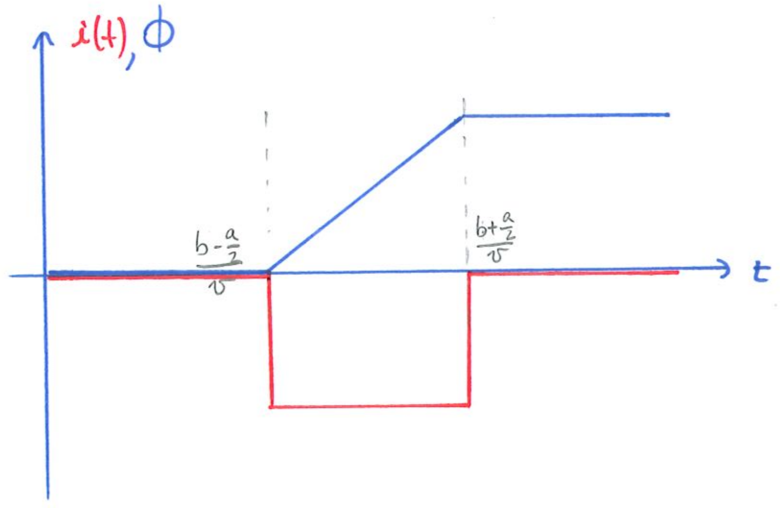
À l'aide d'un schéma électrique équivalent du cadre, et de la loi des mailles, on trouve

Cas 1 : $\underline{i = 0}$

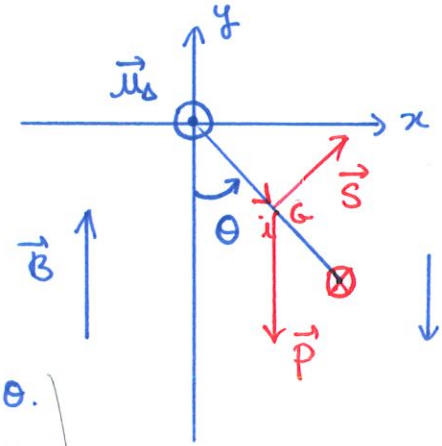
Cas 2 : $\underline{i = \frac{e}{R} = -\frac{Bav}{R}}$

Cas 3 : $\underline{i = 0}$

3.



Exercice 3



1. Compte tenu de l'orientation de θ, l'axe Δ doit être orienté selon la règle de la main droite.

2. Étapes de résolution : On cherche une équation portant sur θ. Il s'agit d'une équation du mouvement du cadre, donc une équation mécanique. Pour l'établir, il faut exprimer l'action de Laplace qui s'applique sur le cadre. On cherchera donc tout d'abord à établir le courant qui apparait dans le cadre, avec une équation électrique.

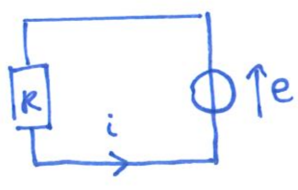
* Orientation du cadre : on choisit une orientation du cadre
cela impose l'orientation du vecteur surface $\vec{S}$.

* Expression du courant induit

Le flux à travers le cadre s'exprime $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\sin\theta$

(si on a un doute, on projette $\vec{B} = B\vec{e}_y$ et $\vec{S} = S\cos\theta\,\vec{e}_x + S\sin\theta\,\vec{e}_y$)

Alors la force électromotrice est $e = -\frac{d\phi}{dt} = -BS\dot{\theta}\cos\theta$



et, à l'aide d'un schéma électrique équivalent, on trouve :

$$e = Ri \Rightarrow i(t) = -\frac{BS\dot{\theta}}{R}\cos\theta$$

* <u>Expression des actions de Laplace</u>

Parcouru par un courant $i(t)$, le cadre est équivalent à un moment magnétique

$\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$ (i et $\vec{S}$ liés par la règle de la main droite)

et il s'applique un couple : $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B}$

or, avec projection, cela donne $\vec{\Gamma} = iS\,(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}) \wedge B\vec{e_y}$

$= iS\cos\theta\,\vec{e_z}$ (où $\vec{e_z} = \vec{u_\Delta}$)

Finalement $\vec{\Gamma} = -\dfrac{B^2S^2\cos^2\theta}{R}\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

Rq : on peut sinon exprimer la force de Laplace sur chaque portion du cadre pour retrouver l'expression du couple (c'est plus long...)

* <u>Équation du mouvement</u>

On applique le th. du moment cinétique au cadre par rapport à l'axe (Δ)

sachant que le cadre est soumis à : → couple de Laplace $\vec{\Gamma}$

→ poids appliqué en G centre de gravité

donc $\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{P}) = -mg \cdot \underbrace{\frac{a}{2}\sin\theta}_{\text{bras de levier}}$

alors : $J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma}\cdot\vec{u_\Delta} + \mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{P})$

$= -\dfrac{B^2S^2\cos\theta}{R}\dot{\theta} - \dfrac{mga}{2}\sin\theta$

$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \dfrac{B^2S^2\cos\theta}{JR}\dot{\theta} + \dfrac{mga}{2J}\sin\theta = 0$ → équation non-linéaire

On linéarise l'équation différentielle lorsque $|\theta| \ll 1$: $\cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq \theta$

et $\ddot{\theta} + \dfrac{B^2S^2}{RJ}\dot{\theta} + \dfrac{mga}{2J}\theta = 0$ → $\ddot{\theta} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

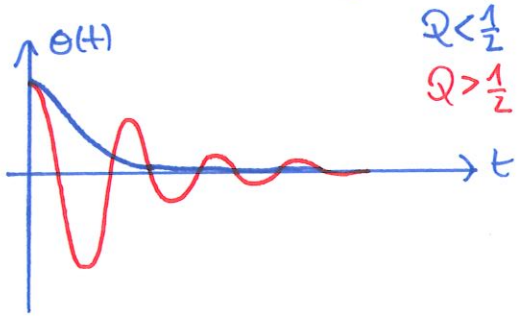
on trouve l'équation d'un oscillateur amorti avec $\omega_0^2 = \dfrac{mga}{2J}$ et $Q = \dfrac{R}{b^2B^2}\sqrt{\dfrac{Jmg}{2a^3}}$

3. Il existe 3 régimes possibles en fonction de la valeur de Q.

→ si $Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique

→ si $Q = \frac{1}{2}$: régime critique

→ si $Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique



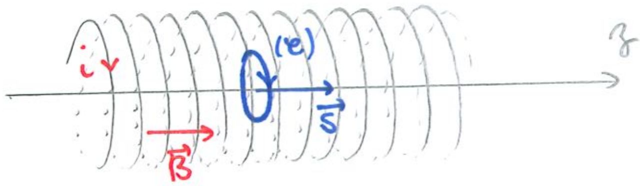
Rq: $Q \propto R$ donc plus la résistance est élevée, plus le facteur de qualité est élevé. C'est cohérent car le couple de Laplace est un couple résistant (tel frottement fluide). En augmentant R, on diminue le courant induit et donc l'intensité du couple résistant.

freinage par courant de Foucault

À la limite où $R \to \infty$, il n'y a plus de courant qui s'établit, donc plus de dissipation.

Exercice 4

1. L'anneau est orienté de telle manière à avoir un vecteur surface $\vec{S} = S\vec{e_z}$.

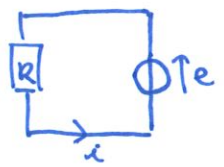


Alors le flux à travers l'anneau s'exprime :

$$\phi = \vec{B}.\vec{S} = \mu_0 n i(t) . \pi r^2$$

2. La loi de Faraday permet de déterminer la fem induite : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 n \mu_0 \frac{di}{dt}$

Le circuit équivalent permet d'exprimer le courant induit :



$$i_{ind}(t) = \frac{e}{R} \Rightarrow i_{ind}(t) = -\frac{\pi r^2 \mu_0 n}{R}\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow i_{ind}(t) = \frac{\pi r^2 \mu_0 n \omega}{R} I_0 \sin(\omega t)$$

3. La puissance dissipée par effet Joule s'exprime $P_J = R i_{ind}^2 = \frac{\pi^2 r^4 \mu_0^2 n^2 \omega^2 I_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$

4. Prenons la moyenne de P_J sur une période (soit $\frac{2\pi}{\omega}$), or $\underbrace{\langle \sin^2(\omega t) \rangle}_{\text{moyenne de } \sin^2} = \frac{1}{2}$

donc $\langle P_J \rangle = \dfrac{\pi^2 r^4 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2}{2R}$

5. AN: $\omega = 2\pi f$ avec $f = 100.10^3\ Hz$

$n = 200\ m^{-1}$

On souhaite avoir $\langle P_J \rangle = 500W$

alors $I_0 = \dfrac{\sqrt{2R\langle P_J \rangle}}{\pi r^2 \mu_0 n \omega} = \dfrac{\sqrt{2.0{,}1.500}}{\pi (2{,}5.10^{-2})^2 . 4\pi.10^{-7} . 200 . 2\pi . 100.10^3} = 32{,}3\ A$

La valeur est élevée, mais raisonnable pour des bobines à spires larges comme on peut en trouver dans des forges à induction.

6. On considère la transformation suivante :

Anneau de cuivre 20g à 20°C $\longrightarrow$ Anneau de cuivre 20g à 1085°C

On applique premier principe à l'anneau :

$\Delta H = W_{Joule} + 0$

on néglige toute perte thermique

or $\Delta H = mc\ (T_f - T_i)$

$W_{Joule} = P_J . \Delta t$ où Δt = durée du chauffage

$\Rightarrow mc(T_f - T_i) = P_J\, \Delta t$

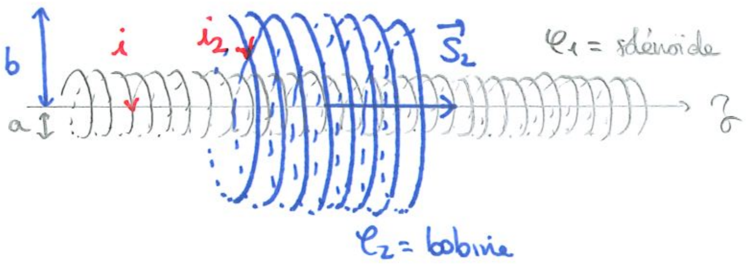
$\Rightarrow \Delta t = \dfrac{mc(T_f - T_i)}{P_J}$

AN: $\Delta t = \dfrac{20.10^{-3} \times 385 \times (1085 - 20)}{500} \simeq 15 s$

Le système est efficace pour faire fondre des petites pièces.

Exercice 5

1. Pour déterminer l'inductance mutuelle des deux circuits, il faut calculer le flux magnétique d'un circuit à travers l'autre.

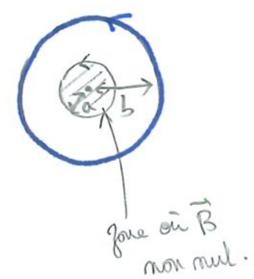


Le champ magnétique créé par le solénoïde vaut $\vec{B} = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i \, \vec{e_z}$ à l'intérieur et est nul à l'extérieur. On peut alors déterminer $\phi_{1\to 2}$ le flux de ce champ à travers la bobine.

On oriente alors les spires de la bobine pour que le vecteur surface soit selon $\vec{e_z}$.

* flux à travers 1 spire : $\phi_{1spire} = B \cdot \pi a^2$

car le champ est non nul uniquement sur la surface d'un disque de rayon a



* flux à travers N_2 spires : $\phi_{1\to 2} = N_2 \, \phi_{1spire}$

$$= N_2 \pi a^2 \cdot \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} i$$

* Par définition de l'inductance mutuelle : $\phi_{1\to 2} = M \times i$

donc $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \pi a^2$

2. On exprime le rapport $\frac{L_2}{M}$:

$$\frac{L_2}{M} = \frac{\mu_0 \frac{N_2^2}{\ell_2} \pi a^2}{\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \pi a^2} = \frac{N_2 \ell_1}{N_1 \ell_2}$$

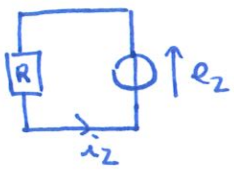
alors $\frac{L_2}{M} \ll 1$ si $\frac{N_2}{N_1} \ll \frac{\ell_2}{\ell_1}$

Dans le cas où $L_2 \ll M$, le flux à travers la bobine s'exprime :

$$\phi_2 = \underbrace{\phi_{2\to 2}}_{\text{flux propre}} + \phi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M i \simeq M i$$

et alors la force électromotrice dans la bobine s'exprime : $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ (loi de Faraday)

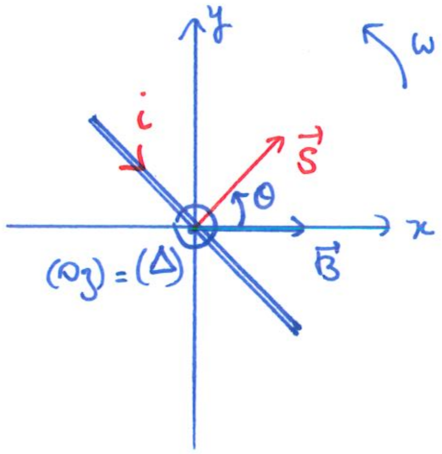
$$\Rightarrow e_2 = -n\frac{di}{dt} = n\omega i_0 \sin(\omega t)$$



Le schéma équivalent de la bobine permet d'en déduire l'expression du courant induit :

$$i_2 = \frac{e_2}{R} = \frac{n\omega i_0}{R}\sin(\omega t)$$

Exercice 6



1. Avant d'attaquer l'exercice, il faut faire un schéma et introduire les grandeurs nécessaires au calcul du flux.

On oriente la spire, ce qui impose le sens du vecteur surface $\vec{S}$.

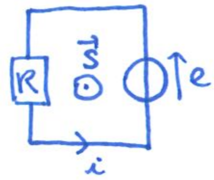
Compte tenu du choix d'orienter $\vec{B} = B\vec{e_x}$, on trouve que le flux s'exprime :

$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta$$

La force électromotrice est alors donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\dot{\theta}\sin\theta$

2. Il faut d'abord établir l'expression du courant dans la spire :

avec le schéma électrique équivalent, on trouve $i = \frac{e}{R}$



donc $i = \frac{BS\dot{\theta}}{R}\sin\theta$

Ainsi, le moment magnétique de la spire est : $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S} = \frac{BS\dot{\theta}}{R}\sin\theta\,\vec{S}$

3. Le couple de Laplace qui s'applique sur la spire est $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B} = -\frac{B^2S^2\dot{\theta}}{R}\sin^2\theta\,\vec{e_z}$

Pour retrouver ce résultat, on peut développer le calcul en projetant $\vec{S} = S\cos\theta\,\vec{e_x} + S\sin\theta\,\vec{e_y}$

La puissance instantanée du couple de Laplace sur la spire : $\mathcal{P}_L = \vec{\Gamma}\cdot\vec{e_z} \times \dot{\theta}$
(en rotation autour de (Oz))

$$= -\frac{B^2S^2}{R}\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 < 0$$

À tout instant, $\mathcal{P}_L < 0$, il s'agit d'un <u>couple résistant</u>.

En supposant que $\dot{\theta} = \text{cste} = \omega$ et que $\theta = \omega t$, alors :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{B^2S^2\omega}{R}\sin(\omega t)^2\,\vec{e_z}$$

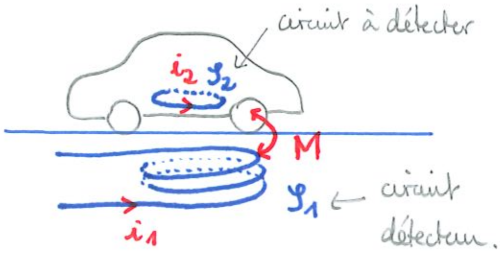
En moyennant sur une période $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$, on obtient le couple moyen de Laplace :

$$\langle\vec{\Gamma}\rangle = -\frac{B^2S^2\omega}{R}\langle\sin(\omega t)^2\rangle\,\vec{e_z} = -\frac{B^2S^2\omega}{2R}\,\vec{e_z}$$ car $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$

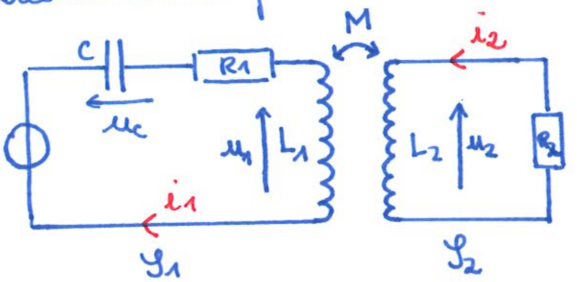
Rq : pour que $\omega = \text{cste}$, il faut qu'un opérateur exerce un couple moteur qui compenserait le couple de Laplace résistant.

Exercice 7

1. On s'intéresse au dispositif réel suivant :



On modélise le tout par les circuits suivants :



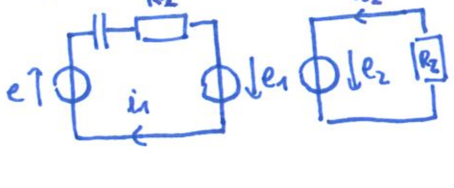
En convention <u>récepteur</u> :

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

⚠ termes issus du couplage.

D'où sortent ces expressions ? Les effets d'induction et le couplage entre les circuits mènent au schéma équivalent :



où $e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt}$ avec ϕ_1 = flux à travers $(\mathcal{S}_1)$

$$= \phi_{1\to1} + \phi_{2\to1}$$
$$= L_1 i_1 + M i_2$$

alors $e_1 = -L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt}$

et de la même manière : $e_2 = -L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt}$

or $u_1 = -e_1$ et $u_2 = -e_2$, cela mène aux expressions données.

<u>Loi des mailles</u> :

$$\begin{cases} e(t) = u_c + R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

(et $i_1 = C \dfrac{du_c}{dt}$)

En RSF, à la pulsation ω, on aurait

$$L_1 \frac{di_1}{dt} \longrightarrow jL_1\omega i_1$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} \longrightarrow jL_2\omega i_2$$

ainsi les termes $R_1 i_1$ et $R_2 i_2$ sont négligeables (et donc on peut négliger les résistances R_1 et R_2) si

$$\begin{cases} \dfrac{R_1 i_1}{|jL_1\omega i_1|} \ll 1 \iff \underline{R_1 \ll L_1\omega} \\ \dfrac{R_2 i_2}{|jL_2\omega i_2|} \ll 1 \iff \underline{R_2 \ll L_2\omega} \end{cases}$$

Ainsi, si l'on se place à <u>hautes fréquences</u>, il sera possible de négliger les résistances R_1 et R_2

2. Compte tenu de l'approximation de la question précédente, les équations deviennent :

$$\begin{cases} e(t) = u_c(t) + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} & (*) \\ 0 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} & (**) \end{cases}$$

(**) donne $\dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{M}{L_2} \dfrac{di_1}{dt}$

or $u_1(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \Rightarrow u_1(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\left(-\dfrac{M}{L_2}\dfrac{di_1}{dt}\right)$

$$= \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\frac{di_1}{dt}$$

Finalement $\underline{u_1(t) = L_1(1-K)\dfrac{di_1}{dt}}$ où $\underline{K = \dfrac{M^2}{L_1 L_2}}$

On trouve une relation caractéristique d'une inductance :

$$u_1(t) = L_{eq} \frac{di_1}{dt}$$ où $L_{eq} = L_1(1-K)$ serait l'inductance équivalente en présence de couplage.

si le couplage est nul ($M=0$) on retrouve $L_{eq} = L_1$

3. En RSF, on passe en notation complexe :

$$i_1(t) \rightarrow \underline{i_1}(t) = \underline{I_1}\, e^{j\omega t}$$
$$i_2(t) \rightarrow \underline{i_2}(t) = \underline{I_2}\, e^{j\omega t}$$
$$e(t) \rightarrow \underline{e}(t) = E\, e^{j\omega t}$$

phase de e(t) choisi comme origine des phases.

et $i_1(t) = C\frac{du_c}{dt} \rightarrow \underline{i_1} = jC\omega \underline{u_c}$

Les équations (*) et (**) deviennent :

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{i_1} + jL_1\omega\,\underline{i_1} + jM\omega\,\underline{i_2} \\ 0 = jL_2\omega\,\underline{i_2} + jM\omega\,\underline{i_1} \end{cases}$$

On obtient alors : $E = \left(\dfrac{1}{jC\omega} + jL_1\omega - j\dfrac{M^2}{L_2}\omega\right)\underline{i_1}$

$$\Rightarrow \underline{i_1} = \frac{jC\omega E}{1 - C\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\omega^2}$$

Il y a une résonance ($|\underline{i_1}| \rightarrow \infty$) pour $\omega_p = \dfrac{1}{\sqrt{CL_1(1-K)}}$

Rq : Pour être plus précis, on peut reprendre la loi des mailles complète pour le circuit $\mathcal{S}_1$

on aurait $E = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{i_1} + R_1\underline{i_1} + jL_1\omega\,\underline{i_1} + jM\omega\,\underline{i_2}$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{jC\omega} + R_1 + jL_1\omega - j\frac{M^2}{L_2}\right)\underline{i_1}$$

$$\Rightarrow \underline{i_1} = \frac{jC\omega E}{1 + jR_1C\omega - L_1C(1-K)\omega^2} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_p Q}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p Q} - \omega^2/\omega_p^2} \times \frac{E}{R_1}$$

passe bande du 2nd ordre !

où $Q = \dfrac{1}{R_1}\sqrt{\dfrac{L_{eq}}{C}}$ et $\omega_p = \dfrac{1}{\sqrt{L_{eq}C}} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C(1-K)}}$

4. Sans la voiture, il n'y a pas de circuit $\mathcal{S}_2$, donc $M=0$

Le circuit $\mathcal{S}_1$ est alors un RLC série, avec une pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$

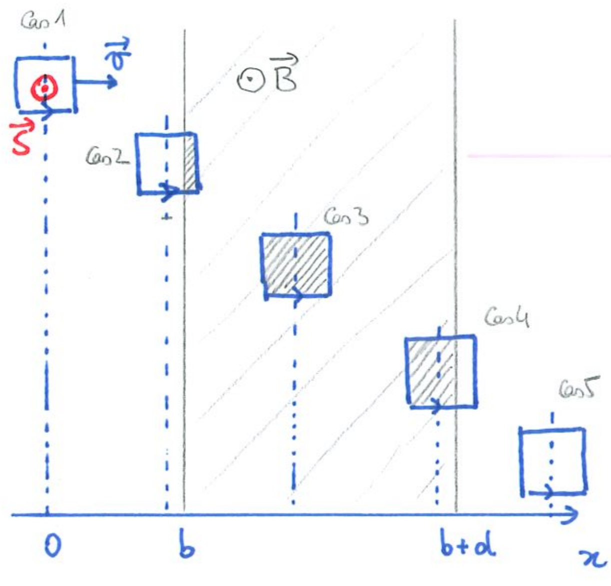
En présence de voiture, la pulsation propre du circuit $\mathcal{S}_1$ est modifié dû au couplage, et $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C(1-K)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}$

La variation relative est $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0}$

Pour $K \ll 1$, $\omega_p = \omega_0 (1-K)^{-1/2} \underset{DL1}{\simeq} \omega_0\left(1+\frac{K}{2}\right)$ et $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{K}{2}$

On observe alors une augmentation de la pulsation propre du circuit. Cela permet de détecter la présence d'une voiture.
Lorsque le couplage est idéal, $K \to 1$ et alors $\omega_p \to \infty$
Cependant, un couplage maximal est impossible à obtenir dans le cas d'une voiture couplée à une bobine.

Exercice 8



1. Pour déterminer les équations sur la vitesse v du cadre (équation mécanique), il faut d'abord déterminer l'expression des forces de Laplace qui s'appliquent sur le cadre au cours du mouvement.
Il faut pour cela établir l'évolution du courant $i(t)$ (équation électrique).

Expression du flux : (on oriente $\vec{S}$ selon l'orientation du cadre)

Cas 1 : $x \leq b - \frac{a}{2}$: $\phi = 0$

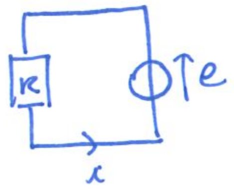
Cas 2 : $b-\frac{a}{2} \leq x \leq b+\frac{a}{2}$: $\phi = Ba\left(x+\frac{a}{2}-b\right)$

Cas 3 : $b+\frac{a}{2} \leq x \leq b+d-\frac{a}{2}$: $\phi = Ba^2$

Cas 4 : $b+d-\frac{a}{2} \leq x \leq b+d+\frac{a}{2}$: $\phi = Ba\left(b+d-x+\frac{a}{2}\right)$

Cas 5 : $x \geq b+d+\frac{a}{2}$: $\phi = 0$

Avec la loi de Faraday, on en déduit la fém e dans le cadre, et avec un schéma équivalent on trouve i(t) le courant induit :



Cas 1 : $e = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{e}{R} = 0$

Cas 2 : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bav \Rightarrow i(t) = -\frac{Bav}{R}$

Cas 3 : $e = -\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow i(t) = 0$

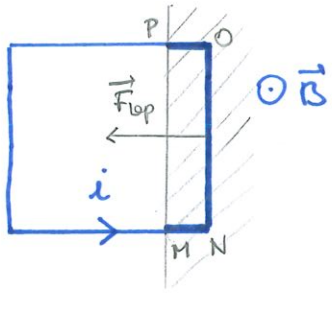
Cas 4 : $e = -\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{Bav}{R}$

Cas 5 : $e = 0 \Rightarrow i(t) = 0$

Équation du mouvement

* Pour les cas 1, 3 et 5, comme $i(t) = 0$, il n'y a pas de force de Laplace qui s'applique sur le cadre. Si l'on suppose que les autres forces se compensent, alors le PFD selon $\vec{e_x}$ donne : $m\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

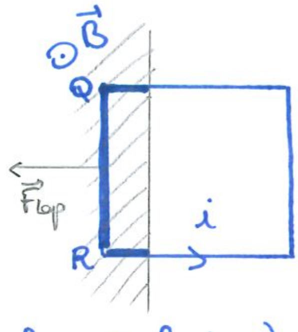
* Pour le cas 2 : on détermine la force de Laplace :



sur la partie du cadre plongée dans un champ $\vec{B}$ subit une force de Laplace

$$\vec{F}_{Lap} = i\vec{MN}\wedge\vec{B} + i\vec{NO}\wedge\vec{B} + i\vec{OP}\wedge\vec{B}$$
$$= i\vec{NO}\wedge\vec{B} \quad \text{car } \vec{MN} = -\vec{OP}$$
$$= iaB\vec{e_x}$$
$$= -\frac{a^2B^2}{R}v\vec{e_x}$$ (c'est bien une force de freinage)

* Pour le cas 4 : par un raisonnement similaire,



on trouve que

$$\vec{F}_{Lap} = i\vec{QR}\wedge\vec{B} = -iaB\vec{e_x}$$
$$= -\frac{a^2B^2}{R}v\vec{e_x}$$ ((c'est bien une force de freinage)

Ainsi, le PFD dans les cas 2 et 4 donne la même équation selon $\vec{e_x}$: $\frac{dv}{dt} = -\frac{a^2B^2}{mR}v$

Finalement : * lorsque le cadre n'est pas à cheval entre la zone où règne $\vec{B}$ et le vide : $\frac{dv}{dt} = 0$ et donc $v = \text{cste}$

* lorsque le cadre est à cheval sur une frontière, on a :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{a^2B^2}$$

On peut obtenir une équation sur $v(x)$ en remarquant que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

alors l'équation différentielle devient : $\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\tau} = 0$

2. On résout les équations précédemment établies :

Pour $x \leq b - \frac{a}{2}$: $v = \text{cste} = v_0$

Pour $b - \frac{a}{2} \leq x \leq b + \frac{a}{2}$: $\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\tau}$ donc $v(x) = -\frac{x}{\tau} + K$, K contante d'intégration

or en $x = x_0 = b - \frac{a}{2}$, $v(x_0) = v_0 \Rightarrow K = v_0 + \frac{x_0}{\tau}$

D'où $v(x) = v_0 - \frac{x - x_0}{\tau}$

Pour $b + \frac{a}{2} < x \leq b + d - \frac{a}{2}$: $v = \text{cste} = v(x_0 + a) = v_0 - \frac{a}{\tau}$

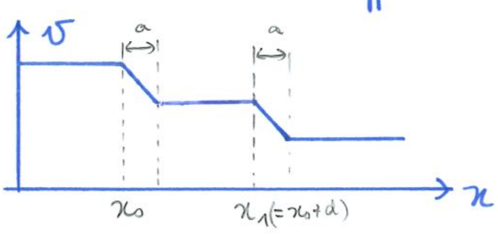
Pour $b + d - \frac{a}{2} \leq x \leq b + d + \frac{a}{2}$: De nouveau $v(x) = -\frac{x}{\tau} + K'$

or en $x = x_1 = b + d - \frac{a}{2}$, $v(x_1) = v_0 - \frac{a}{\tau} \Rightarrow K' = v_0 - \frac{a}{\tau} + \frac{x_1}{\tau}$

D'où $v(x) = v_0 - \frac{a}{\tau} - \frac{x - x_1}{\tau}$

Pour $b + d + \frac{a}{2} \leq x$: $v = \text{cste} = v(x_1 + a) = v_0 - \frac{2a}{\tau}$

Tous ces résultats sont valables si v_0 est suffisamment grand pour que la vitesse ne s'annule pas.



3. Si l'on fait la différence entre la vitesse finale (cas 5) et la vitesse initiale (cas 1) on trouve : $\Delta v = -\frac{2a}{\tau} = -\frac{2a^3B^2}{mR}$

Ainsi le cadre ne ressort pas si $v_0 - \frac{2a}{\tau} < 0$

soit si $v_0 < \frac{2a^3B^2}{mR}$

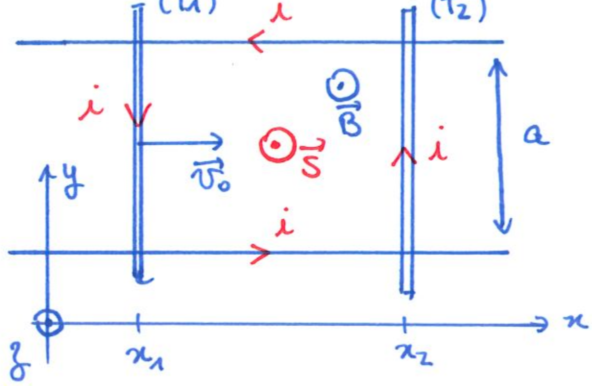
Rq : En revanche, cela ne signifie pas que le cadre s'arrête rigoureusement avant de sortir du cadre.

Dans les cas 2 et 4, l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ indique que la décroissance de la vitesse se fait de manière exponentielle, mais tend vers 0 au bout d'un temps infini.

4. Il s'agit d'un freinage par courants de Foucault. L'énergie cinétique du cadre est convertie en énergie électrique qui est dissipée par effet Joule dans la résistance du cadre.

(Finalement l'énergie cinétique est convertie en chaleur).

Exercice 9



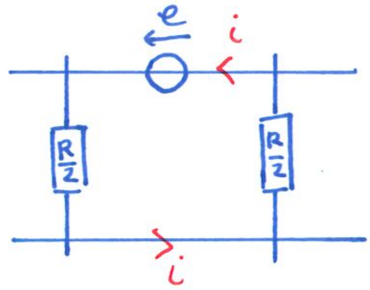
1. On oriente le circuit, cela impose l'orientation de $\vec{S}$.

- Comme la tige (T_1) va vers (T_2), la surface du circuit diminue, donc le flux Φ décroît
- Cela a pour conséquence la création une fem $e > 0$ et donc un courant $i > 0$
- Alors il apparaît des forces de Laplace : selon $-\vec{e_x}$ pour (T_1)
  selon $+\vec{e_x}$ pour (T_2)

Donc (T_1) ralentit et (T_2) est mis en mouvement vers la droite.

Ces observations sont cohérentes avec la loi de Lenz : les forces de Laplace s'opposent au rapprochement de (T1) de (T2) (et donc à une diminution de surface).

2. ⊛ On représente le schéma électrique équivalent :



où e = fem induite

D'après la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt}$

or $\phi = B.(x_2 - x_1)a$

donc $\underline{e = -Ba(v_2 - v_1)}$

et la loi des mailles donne : $e = \frac{R}{2}i + \frac{R}{2}i \Rightarrow \underline{i(t) = \frac{Ba}{R}(v_1 - v_2)}$ (*)

⊛ Pour déterminer les deux équations mécaniques, on applique successivement le PFD à (T1) et à (T2) :

<u>PFD sur (T1)</u> : On suppose que le poids et la réaction normale se compensent.

La force de Laplace s'exprime : $\vec{F}_{lap1} = i(a(-\vec{e_y})) \wedge (B\vec{e_z})$

$= -iaB\vec{e_x}$

Le PFD appliqué à (T1) selon $\vec{e_x}$ donne donc : $\underline{m\frac{dv_1}{dt} = -iaB}$ (**)

<u>PFD sur (T2)</u> : On suppose que la somme des forces se résume à la force de Laplace, dont l'expression est : $\vec{F}_{lap2} = i(a\vec{e_y}) \wedge (B\vec{e_z}) = iaB\vec{e_x}$

Ainsi le PFD sur (T2) selon $\vec{e_x}$ donne : $\underline{m\frac{dv_2}{dt} = iaB}$ (***)

3. Grâce à (*), les équations (**) et (***) deviennent :

$$\begin{cases} \underline{m\frac{dv_1}{dt} = -\frac{B^2a^2}{R}(v_1 - v_2)} & (1) \\ \underline{m\frac{dv_2}{dt} = \frac{B^2a^2}{R}(v_1 - v_2)} & (2) \end{cases}$$

car v_1 et v_2 interviennent dans les deux équations

On trouve bien 2 équations couplées portant uniquement sur v_1 et v_2

4. Pour découpler les équations (1) et (2), on pose :

$$\sigma(t) = v_1(t) + v_2(t)$$
$$\delta(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

Alors * (1) + (2) donne : $\dfrac{d}{dt}(m v_1 + m v_2) = 0$

Il y a conservation de la quantité de mouvement du système $\{(T_1)+(T_2)\}$
Les forces de Laplace apparaissent comme des forces intérieures, d'interaction entre les tiges par l'intermédiaire du champ $\vec{B}$!

alors $\underline{\dfrac{d\sigma}{dt} = 0}$ $\Rightarrow$ $\sigma(t) = \text{cste}$

or à $t=0$, $\sigma(0) = v_1(0) + v_2(0) = v_0 + 0 = v_0$

donc $\underline{\sigma(t) = v_0}$

* (1) − (2) donne : $m\dfrac{d}{dt}(v_1 - v_2) = -\dfrac{2B^2a^2}{R}(v_1 - v_2)$

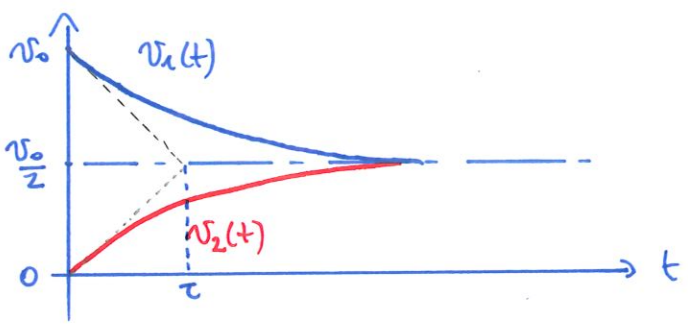
$$\Rightarrow \underline{\frac{d\delta}{dt} + \frac{\delta}{\tau} = 0} \quad \text{avec} \quad \underline{\tau = \frac{mR}{2a^2B^2}}$$

Ainsi $\delta(t) = Ae^{-t/\tau}$

or à $t=0$, $\delta(0) = v_1(0) - v_2(0) = v_0$

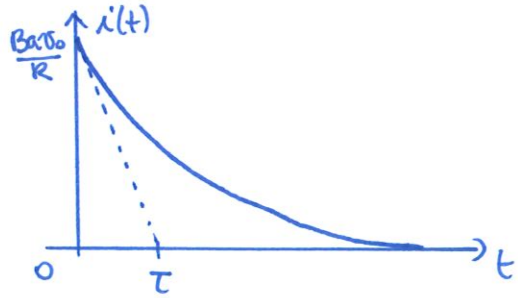
D'où $\underline{\delta(t) = v_0 e^{-t/\tau}}$

Finalement, $\begin{cases} v_1 + v_2 = v_0 \\ v_1 - v_2 = v_0 e^{-t/\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{v_1(t) = \dfrac{v_0}{2}\left(1 + e^{-t/\tau}\right)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \dfrac{v_0}{2} \\ \underline{v_2(t) = \dfrac{v_0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \dfrac{v_0}{2} \end{cases}$



5. On utilise (*) :

$$i(t) = \frac{Ba}{R}(v_1 - v_2) = \frac{Ba}{R}\delta(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{i(t) = \frac{Bav_0}{R} e^{-t/\tau}}$$



6. Puissance dissipée par effet Joule : $P_J = \frac{R}{2}i^2 + \frac{R}{2}i^2 = Ri^2$

Énergie dissipée par effet Joule entre t et t+dt :

$$\delta W_J = P_J\, dt = Ri^2 dt$$

Énergie dissipée par effet Joule entre t=0 et t→∞ :

$$W_J = \int \delta W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R \cdot \frac{B^2a^2v_0^2}{R^2} e^{-2t/\tau} dt$$

$$= \frac{B^2a^2v_0^2}{R} \cdot \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{B^2a^2v_0^2}{R} \cdot \frac{mR}{4B^2a^2}.$$

$$\Rightarrow \underline{W_J = \frac{1}{4} m v_0^2}$$

7. Dans notre cas, l'énergie mécanique se réduit à l'énergie cinétique.

$$E_m = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Alors : $\Delta E_m = E_m(t=\infty) - E_m(0)$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_1^2(\infty) - v_1^2(0)\right) + \frac{1}{2}m\left(v_2^2(\infty) - v_2^2(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0^2}{4} - v_0^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0^2}{4} - 0\right)$$

$$= \underline{-\frac{1}{4}mv_0^2} = -W_J$$

L'énergie dissipée par effet Joule est puisée dans l'énergie cinétique.

Rq : on peut retrouver cela par un bilan de puissance :

$$(**) \quad m\frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \Big) \times v_1$$
$$(***) \quad m\frac{dv_2}{dt} = iaB \quad \Big) \times v_2$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dE_{c1}}{dt} = -iaBv_1 \\ \dfrac{dE_{c2}}{dt} = iaBv_2 \end{array} \right.$$

en sommant les deux équations :

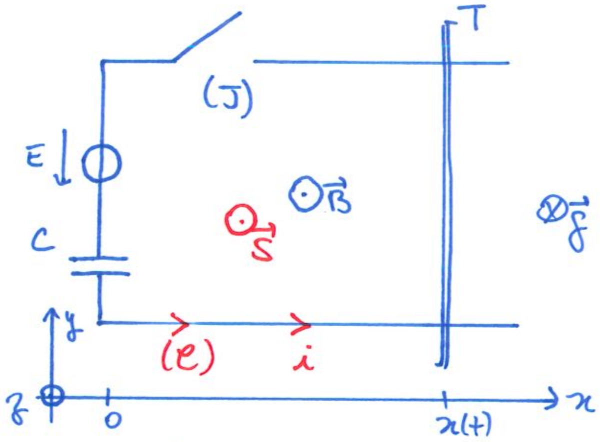
$$\frac{d(E_{c1}+E_{c2})}{dt} = -i \underbrace{aB(v_1 - v_2)}_{= Ri \text{ d'après } (*)}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -Ri^2 = -P_J < 0$$

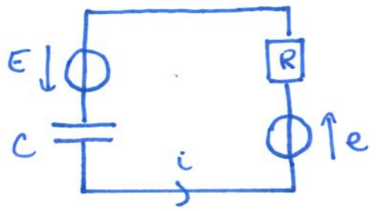
L'énergie mécanique décroît et est dissipée par effet Joule !

Exercice 10

1. On commence par orienter le circuit $(\mathcal{C})$ ce qui impose le vecteur surface $\vec{S}$.



Pour établir une équation électrique, on fait le schéma électrique équivalent :



avec R résistance interne de la tige
e fem induite

La loi de Faraday donne : $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$

où $\phi = \vec{B}.\vec{S} = B.a.x$

alors $e = -Bav$

et la loi des mailles :

$E + e = u_c + Ri \quad (*)$

Pour établir l'équation mécanique, on applique le PFD à la tige :

- Le poids et la réaction normale se compensent
- La force de Laplace s'écrit : $\vec{F}_{Lap} = i.(a\vec{e_y}) \wedge (B\vec{e_z}) = iaB\vec{e_x}$

alors le PFD selon $\vec{e}_x$ donne : $m\dfrac{dv}{dt} = iaB$ (**)

2. Et alors $\dfrac{d(*)}{dt}$: $\dfrac{de}{dt} = \dfrac{du_c}{dt} + R\dfrac{di}{dt}$

$$\Rightarrow -Ba\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} \qquad i = C\frac{du_c}{dt}$$

avec (**) : $-Ba\cdot\dfrac{iaB}{m} = \dfrac{i}{C} + R\dfrac{di}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{a^2B^2}{mR}\right)i = 0$$

On pose $\tau = \left(\dfrac{1}{RC} + \dfrac{a^2B^2}{mR}\right)^{-1}$, alors $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = 0$

On résout, avec la condition initiale déterminée sachant que $u_c(t=0^-) = u_c(t=0^+) = 0$

$e(t=0) = 0$ car $v(0) = 0$

$$E + e(0) = u_c(0) + Ri(0)$$

$$\Rightarrow E = Ri(0)$$

$$\Rightarrow i(0) = \frac{E}{R} = I_0$$

ainsi $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ avec $I_0 = \dfrac{E}{R}$

3. On reprend : $\dfrac{de}{dt} = \dfrac{du_c}{dt} + R\dfrac{di}{dt} = \dfrac{i}{C} + R\dfrac{di}{dt}$

avec la question précédente, on obtient :

$$\frac{de}{dt} = \frac{I_0}{C}e^{-t/\tau} + \left(-\frac{R}{\tau}\right)I_0 e^{-t/\tau} = \left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)RI_0 e^{-t/\tau}$$

$$= -\frac{a^2B^2}{m}I_0 e^{-t/\tau}$$

on intègre : $e(t) = +\dfrac{a^2B^2I_0}{m}\tau e^{-t/\tau} + K$

or $e(0) = 0$, donc $e(t) = -\dfrac{a^2B^2I_0\tau}{m}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

et alors $v = -\dfrac{e}{aB}$ $\Rightarrow$ $v(t) = -\dfrac{aBI_0\tau}{m}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$

4. La puissance fournie par le générateur est $P_{géné} = E \times i$

Donc pendant une durée dt, l'énergie fournie par le générateur est $P_{géné} . dt$

Et alors $E_G = \int_0^\infty P_{géné} \, dt = \int_0^\infty E . i \, dt = E \int_0^\infty I_0 e^{-t/\tau} dt$

$$= E I_0 \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \underline{E_G = \frac{E^2 \tau}{R}}$$

5. Soit on utilise $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$

Soit, plus simplement, on utilise (*) :

$$u_c = E + e - Ri$$

$$= E - \frac{a^2 B^2 I_0 \tau}{m} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) - R . \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$= \underline{\left(E - \frac{a^2 B^2 I_0 \tau}{m}\right) \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

c'est à savoir, c'est du cours !

6. Soit on se rappelle que l'énergie stockée à un instant t dans un condensateur est $\frac{1}{2} C u_c^2$, et alors $E_e = \frac{1}{2} C u_c^2(\infty) - \frac{1}{2} C u_c^2(0)$

Sinon, on repart de la puissance reçue par le condensateur : $P_{reçu} = u_c \times i$

Ainsi $E_e = \int_0^\infty P_{reçu} \, dt = \int_0^\infty u_c . i \, dt = \int_0^\infty u_c . C \frac{du_c}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_c^2\right) dt$

$$= \left[\frac{1}{2} C u_c^2 \right]_0^\infty$$

D'où $\underline{E_e = \frac{1}{2} C \left(E - \frac{a^2 B^2 I_0 \tau}{m} \right)^2}$

7. La puissance dissipée par effet Joule (c'est la puissance reçue par la résistance)

$$\mathcal{P}_J = Ri^2$$

Donc l'énergie dissipée durant dt par effet Joule est : $\mathcal{P}_{Joule}\,dt$

et alors $$E_J = \int_0^\infty \mathcal{P}_{Joule}\,dt = \int_0^\infty Ri^2 dt = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt$$

$$= RI_0^2 \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \underline{E_J = \frac{E^2\tau}{2R}}$$

8. La puissance des forces de Laplace est $\mathcal{P}_{Lap} = \vec{F}_{Lap}\cdot\vec{v} = iaBv$

Donc le travail élémentaire durant dt s'exprime : $\delta W = \mathcal{P}_{Lap}\,dt = iaBv\,dt$

et alors $$W = \int_0^\infty \delta W = \int_0^\infty iaBv\,dt = aB\int_0^\infty \frac{aBI_0^2\tau}{m} e^{-t/\tau}(1-e^{-t/\tau})dt$$

$$= \frac{a^2B^2I_0^2\tau}{m}\left(\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty - \left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty\right)$$

$$= \frac{a^2B^2I_0^2\tau}{m}\left(\tau - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{W = \frac{a^2B^2I_0^2\tau^2}{2m}} = \underline{\frac{a^2B^2}{2mR}\cdot\frac{E^2\tau^2}{R}}$$

9. Prenons l'expression de E_e :

$$E_e = \frac{1}{2}C\left(E - \frac{a^2B^2I_0\tau}{m}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}CE^2\left(1 - \frac{a^2B^2}{mR}\tau\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}CE^2\left(1 - \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right)\tau\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}CE^2\cdot\frac{\tau^2}{RC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{E^2\tau^2}{R}\cdot\frac{1}{RC}$$

Ainsi $W + E_e = \dfrac{E^2\tau^2}{R} \cdot \dfrac{a^2B^2}{2mR} + \dfrac{E^2\tau^2}{R} \cdot \dfrac{1}{2RC}$

$$= \frac{E^2\tau^2}{2R}\left(\frac{a^2B^2}{mR} + \frac{1}{RC}\right)$$

$$= \frac{E^2\tau}{2R}$$

Et finalement :

$$W + E_e + E_J = \frac{E^2\tau}{2R} + \frac{E^2\tau}{2R} = \frac{E^2\tau}{R} = E_G$$

$$\Rightarrow \underline{E_G = W + E_e + E_J}$$

L'énergie fournie par le générateur sert à :

→ charger le condensateur

→ mettre en mouvement la tige mobile

→ le reste est dissipé par effet Joule (la moitié pour être précis !)

Rq : on aurait pu directement retrouver cela à partir de $(*) \times i\,dt$:

$$E i\,dt + e i\,dt = u_c i\,dt + R i^2 dt$$

$$= d\left(\tfrac{1}{2} C u_c^2\right) + R i^2 dt$$

en intégrant :

$$\underbrace{\int_0^\infty E i\,dt}_{E_G} = \underbrace{\int_0^\infty d\left(\tfrac{1}{2}Cu_c^2\right)}_{\Delta\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right) = E_e} + \underbrace{\int_0^\infty R i^2 dt}_{E_J} \underbrace{- \int_0^\infty e i\,dt}$$

comme $P_{Lap} = -P_{ind}$

$$-\int_0^\infty e i\,dt = \int_0^\infty -P_{ind}\,dt$$

$$= \int_0^\infty P_{Lap}\,dt$$

$$= W$$

et alors $\underline{E_G = E_e + E_J + W}$