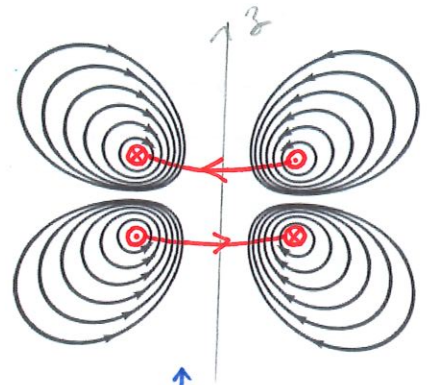
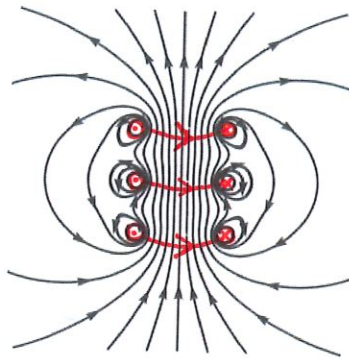


Correction TD26

Exercice 1

Le champ est le plus intense là où les lignes de champ se resserrent, donc au voisinage des sources.

Comme les lignes de champ enlacent les lignes de courant suivant la règle de la main droite, on en déduit l'orientation des courants.

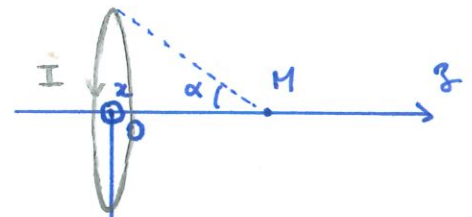


configuration anti-helmholtz

Les spires sont orientées dans des sens opposés. Ainsi le champ au centre du dispositif (entre les spires) est nul.

Exercice 2

1. Invariances: la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz).
Donc $\|\vec{B}\|$ est indépendante de θ .



Symétries: Δ Il faut chercher les plans de symétrie (ou d'antisym.) contenant le point n auquel on souhaite déterminer le champ.

Les plans $(n, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(n, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

Donc $\vec{B}(n)$ est contenu dans ces deux plans. Ainsi $\vec{B}(n) = B(n)\vec{e}_z$

Les résultats obtenus sont bien cohérents avec la formule donnée dans l'énoncé.

2. En utilisant la règle de la main droite, on trouve que le champ $\vec{B}$ est selon $+\vec{e}_z$.
La formule de l'énoncé s'écrit donc avec le signe +.

3. $\|\vec{B}\| = \left| \frac{\mu_0 I}{2R} \right| \cdot |\sin \alpha|^2$ donc B est maximal lorsque $\sin \alpha = 1$, donc quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Cet angle correspond au cas où M est en O , au centre de spire.

4. Comme $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{L^2 + R^2}}$, on peut déterminer alors

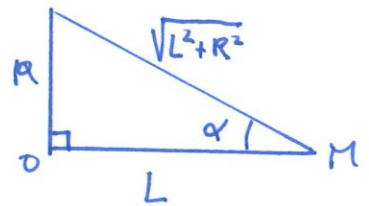
l'expression de la norme du champ :

$$\underline{B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} = 16 \mu T}$$

$$B(n) = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right)^3$$

$$\underline{AN: B(n) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 0,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{10 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2}}} \right)}$$

$$\underline{B(M) \simeq 0,12 \mu T}$$

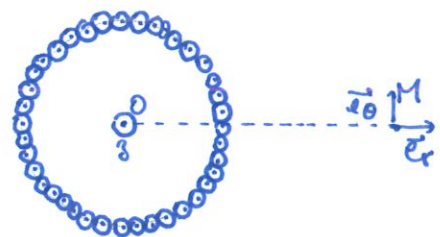


Exercice 3

1. On cherche des plans de symétrie et d'antisymétrie contenant le point M .

* Le plan $(n, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{B}(n)$ appartient à ce plan.

* Le plan $(n, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{B}(n)$ est orthogonal au plan.



2. On en déduit que $\vec{B}(n) = B(n)\vec{e}_\theta$

Rq: comme a priori $B(n) = B(r, \theta, z)$ mais que la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) (donc $B(n)$ ne dépend pas de θ) et par translation selon $\vec{e}_z$ (donc $B(n)$ ne dépend pas de z), alors :

$$B(n) = B(r) \quad (\text{la norme du champ ne dépend que de } r)$$

$$\underline{\text{D'où } \vec{B}(n) = B(r)\vec{e}_\theta}$$

Exercice 4

Comme la latitude de la France est $\alpha = 48^\circ$, alors en coordonnées sphériques :

$$\Theta = 90 - \alpha = 90 - 48 = \underline{42^\circ}$$

Regardons les différentes composantes :

* le résultat $B_p = 0$ (pas de composante selon $\vec{e}_p$) est cohérent avec la réalité : la composante horizontale du champ pointe vers le nord géographique.

* Ainsi, on trouve que B_r est la composante verticale et B_θ la composante horizontale.

Comme $\Theta = 42^\circ$, $\cos \Theta \simeq \sin \Theta$ et alors :

$$\frac{|B_r|}{|B_\theta|} = \left| \frac{2 \cos \Theta}{\sin \Theta} \right| \simeq 2$$

Ce résultat est bien cohérent avec les valeurs B_h et B_v expérimentales.

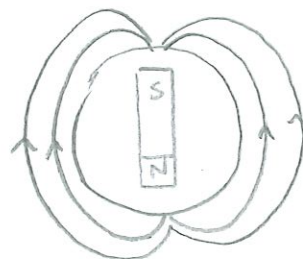
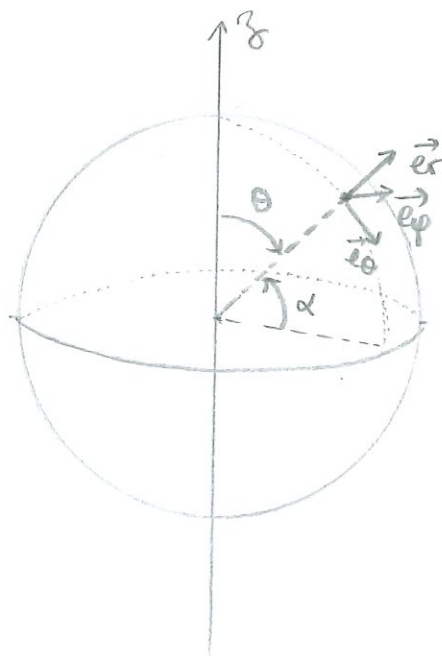
* Comme $\sin(\Theta) > 0$, on trouve que $B_\theta < 0$ si $M < 0$
 $B_\theta > 0$ si $M > 0$

Or comme les boucles pointent à la surface de la Terre vers le pôle nord géographique, on a $B_\theta < 0$, donc $M < 0$.

Ainsi, le pôle nord géographique correspond au pôle sud au sens magnétique.
 (et $\vec{M}$ est selon $-\vec{e}_z$)

AN: Comme $|B_r| = B_v = \frac{\mu_0}{4\pi} |M| \frac{2 \cos \Theta}{r^3}$

$$\Rightarrow |M| = \frac{4\pi B_v R_T^3}{2\mu_0 \cos \Theta} \simeq \underline{7.10^{22} \text{ A.m}^2} \quad \text{avec } R_T = 6400 \text{ km}$$



Exercice 5

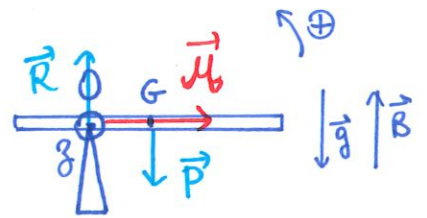
Référentiel : terrestre galiléen

Système : aimant

Bilan des actions : $\rightarrow$ poids $\vec{P} = m\vec{g}$, appliqué en G

$\rightarrow$ réaction du support $\vec{R}$ en O

$\rightarrow$ actions magnétiques de Laplace dans un champ uniforme qui se réduisent au couple $\vec{T} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$



Calcul des moments selon (Oz) : (orienter (Oz) impose le sens $\oplus$ de rotation autour de (Oz))

$$M_{(Oz)}(\vec{P}) = -d \cdot mg$$

$$M_{(Oz)}(\vec{R}) = 0$$

$$T_{(Oz)} = \vec{T} \cdot \vec{e}_z = \mu B \quad (\text{car } \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \mu \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_y = \mu B \vec{e}_z)$$

En appliquant le th. du moment cinétique par rapport à (Oz) à l'équilibre :

$$M_{(Oz)}(\vec{P}) + M_{(Oz)}(\vec{R}) + T_{(Oz)} = 0$$

$$\Rightarrow -mgd + \mu B = 0$$

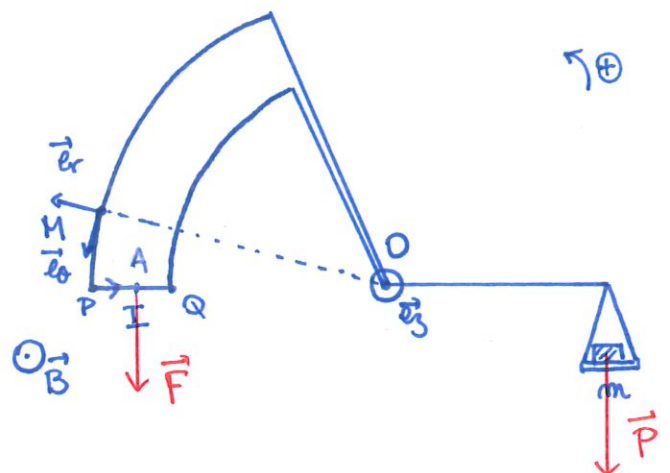
$$\text{D'où } \underline{d = \frac{\mu B}{mg}}$$

Exercice 6

1. Dans la zone grisée, décomposons le circuit en deux parties : celle des parties circulaires, et celle de la partie rectiligne (entre P et Q).

* sur les parties circulaires :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \text{où } d\vec{l} = dl \cdot \vec{e}_\theta \text{ sur la portion de grand rayon} \\ &= I dl (\vec{e}_\theta) \wedge (B \vec{e}_z) \\ &= I dl B \vec{e}_r \end{aligned}$$



comme $d\vec{F}$ est selon $\vec{e}_r$, la droite d'action des forces de Laplace élémentaire sur ces portions de circuit passe par O.

Ainsi ces éléments $d\vec{F}$ ne contribuent donc pas au moment en O.

* sur la portion rectiligne [PQ]:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \text{ avec } d\vec{l} = -dl \vec{e}_r$$

$$= I (-dl \vec{e}_r) \wedge (B \vec{e}_z)$$

$$= I dl B \vec{e}_\theta$$

La force résultante est alors:

$$\vec{F} = \int_P^Q d\vec{F} = \int_P^Q I dl B \vec{e}_\theta = ILB \vec{e}_\theta \text{ s'appliquant en A, milieu de [PQ].}$$

Le moment en O est donc:

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F} = a \vec{e}_r \wedge ILB \vec{e}_\theta = \underline{aILB \vec{e}_z}$$

L'orientation de $\vec{M}_O$ est cohérente avec l'équilibre qui s'établit (si $I > 0$).

2. À vide, la balance est à l'équilibre. Donc la droite d'action du poids de la balance passe par O.

En présence du champ $\vec{B}$ et de la masse m , les actions qui s'appliquent se résument à:

- poids, de moment $\vec{M}_O(\vec{P}) = -a' mg \vec{e}_z$
- moment des forces de Laplace: $\vec{M}_O(\vec{F}) = aILB \vec{e}_z$

On applique le th. du moment cinétique à l'équilibre en O (dans le référentiel du laboratoire galiléen):

$$\vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{selon } \vec{e}_z: -mga' + aILB = 0$$

$$\Rightarrow \underline{B = \frac{a' mg}{aIL}}$$

3. AN: $B = 1,6 T$

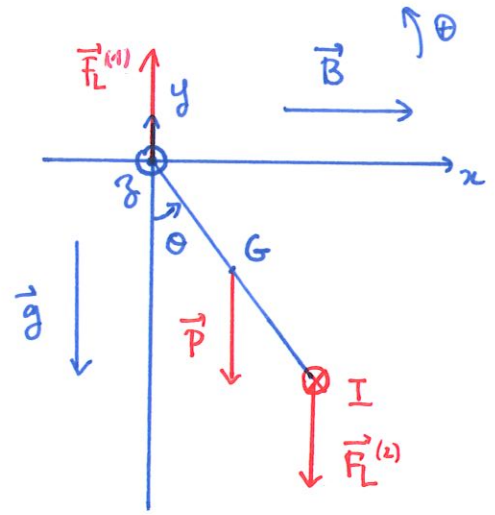
Exercice 7

1. Référentiel : laboratoire galiléen

Système : cadre

Bilan des actions :

- * poids $\vec{P}$ en G
- * liaison pivot parfaite, $\mathcal{M}_{(Oz)}^{(liaison)} = 0$
- * forces de déplacement : $\rightarrow$ sur les côtés de longueur a : $\vec{F}_L^{(a)}$ est selon $\vec{e}_3$
 $\rightarrow$ sur le côté de longueur b confondu avec l'axe (Oz)
 $\vec{F}_L^{(1)} = I b B \vec{e}_y$
 $\rightarrow$ sur le côté de longueur b restant :
 $\vec{F}_L^{(2)} = - I b B \vec{e}_y$



Calculons le moments selon l'axe (Oz) :

- * $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = - mg \cdot \frac{a}{2} \sin \theta$
- * $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_L^{(a)}) = 0$ car $\vec{F}_L^{(a)}$ selon $\vec{e}_3$
- * $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_L^{(1)}) = 0$ car $\vec{F}_L^{(1)}$ a son point d'application sur l'axe (Oz)
- * $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_L^{(2)}) = - I a b B \sin \theta$

Ainsi, avec $\mathcal{H}$ du moment cinétique par rapport à (Oz) :

$$J \cdot \ddot{\theta} = - mg \frac{a}{2} \sin \theta - I a b B \sin \theta$$

La position d'équilibre est obtenue pour $J \ddot{\theta} = 0$ (somme des moments égal à 0)

$$\text{soit pour } a \left[\frac{mg}{2} + I b B \right] \sin \theta = 0$$

- * si $I = - \frac{mg}{2 b B}$: on trouve un équilibre indifférent. Toutes les positions sont des positions d'équilibre.

* si $I \neq -\frac{mg}{2bB}$: alors les positions d'équilibre sont : $\Theta = 0$ et $\Theta = \pi$

$\hookrightarrow$ si $I > -\frac{mg}{2bB}$: $\begin{cases} \Theta = 0 \text{ est stable} \\ \Theta = \pi \text{ est instable} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ si $I < -\frac{mg}{2bB}$: $\begin{cases} \Theta = 0 \text{ est instable} \\ \Theta = \pi \text{ est stable} \end{cases}$

2. On reprend l'équation du mouvement :

$$J\ddot{\Theta} + a\left[\frac{mg}{2} + IbB\right]\sin\Theta = 0$$

Autour d'une position d'équilibre stable (par exemple autour de $\Theta = 0$ si $I > -\frac{mg}{2bB}$)
un DL à l'ordre 1 donne :

$$J\ddot{\Theta} + \underbrace{a\left[\frac{mg}{2} + IbB\right]}_{>0}\Theta = 0$$

La pulsation de l'oscillateur harmonique est $\omega_0^2 = \frac{a\left[\frac{mg}{2} + IbB\right]}{J}$

$$\text{D'où } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{a\left[\frac{mg}{2} + IbB\right]}}$$

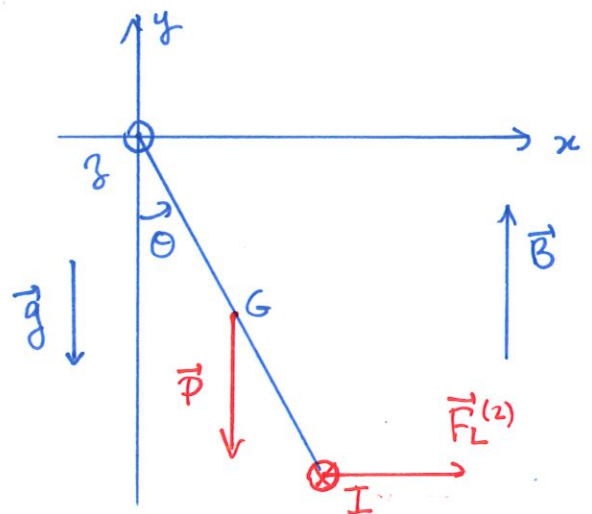
3. Seules les actions de Laplace sont modifiées :

La seule partie ayant un moment non nul par rapport à (O_3) est le côté de longueur b non confondu avec l'axe (O_3) .

$$\vec{F}_L^{(2)} = IbB \vec{e}_x$$

$$\text{Donc } M_{(O_3)}(\vec{F}_L^{(2)}) = Ia b B \cos\Theta$$

Le th. du moment cinétique par rapport à (O_3) donne :

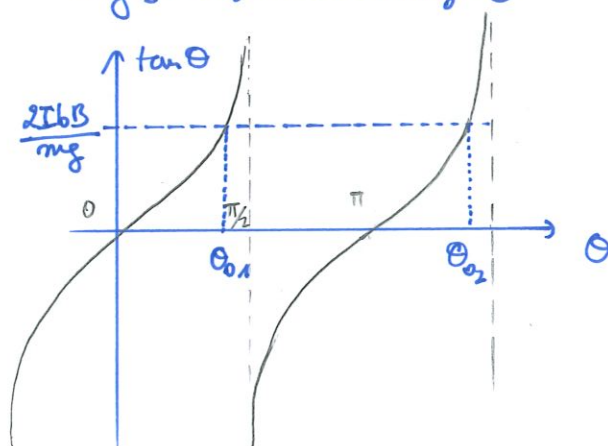


$$J\ddot{\Theta} = -mg\frac{a}{2}\sin\Theta + IabB\cos\Theta$$

Les positions d'équilibre sont obtenues pour : $-mg\frac{a}{2}\sin\Theta_0 + IabB\cos\Theta_0 = 0$

soit $\tan(\Theta_0) = \frac{2IabB}{mg}$

Deux positions d'équilibre possibles !



4. On pose $\Theta(t) = \Theta_0 + \epsilon(t)$, avec $|\epsilon| \ll |\Theta_0|$ et Θ_0 une position d'équilibre.

alors $\ddot{\Theta} = \ddot{\epsilon}$. L'équation du mouvement peut être développée proche de Θ_0 :

$$\begin{aligned} J\ddot{\epsilon} &= -mg\frac{a}{2}\sin(\Theta_0 + \epsilon) + IabB\cos(\Theta_0 + \epsilon) \\ &\approx -mg\frac{a}{2}[\sin(\Theta_0) + \cos(\Theta_0)\epsilon] + IabB[\cos\Theta_0 - \sin\Theta_0\epsilon] \\ &= \underbrace{\left[-mg\frac{a}{2}\sin\Theta_0 + IabB\cos\Theta_0\right]}_{=0} + \left[-mg\frac{a}{2}\cos\Theta_0 - IabB\sin\Theta_0\right]\epsilon \\ &\quad \text{car } \Theta_0 \text{ est une position d'équilibre} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } J\ddot{\epsilon} + \left[mg\frac{a}{2}\cos\Theta_0 + IabB\sin\Theta_0\right]\epsilon = 0$$

or $IabB = mg\frac{a}{2}\tan\Theta_0$ (d'après la condition de la position d'équilibre)

$$\text{D'où } J\ddot{\epsilon} + mg\frac{a}{2}[\cos\Theta_0 + \tan\Theta_0\sin\Theta_0]\epsilon = 0$$

$$\text{et } \cos\Theta_0 + \tan\Theta_0\sin\Theta_0 = \frac{\cos\Theta_0^2}{\cos\Theta_0} + \frac{\sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0} = \frac{1}{\cos\Theta_0}$$

$$\text{Finalement : } \underline{J\ddot{\epsilon} + \frac{mga}{2\cos\Theta_0}\epsilon = 0}$$

On trouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique si $\frac{mga}{2\cos\theta_0} > 0$

Ainsi si $\frac{mga}{2\cos\theta_0} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta_0 > 0$

soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

alors la position d'équilibre est stable (le système oscille autour de la position d'équilibre).

si $\frac{mga}{2\cos\theta_0} < 0 \Leftrightarrow \theta_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

alors la position d'équilibre est instable

Dans le cas où θ_0 est une position d'équilibre stable :

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{2\cos\theta_0} \quad \text{où } \omega_0 = \text{pulsation des petites oscillations.}$$

$$\text{et alors } \underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2J\cos\theta_0}{mga}}}$$