Correction TD25

Exercice 1

1. Résumons les transformations :

(1) → (2) : compression adiabatique réversible
(2) → (3) : isobare réversible
(3) → (4) : détente adiabatique réversible
(4) → (1) : isobare réversible

Les transformations (1) → (2) et (3) → (4) sont adiabatiques réversibles et concernent un gaz parfait. On peut appliquer la loi de Laplace : $PV^\gamma = cste$ ou plutôt ici $P^{1-\gamma}T^\gamma = cste$

Donc $P_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$ et $P_3^{1-\gamma}T_3^\gamma = P_4^{1-\gamma}T_4^\gamma$

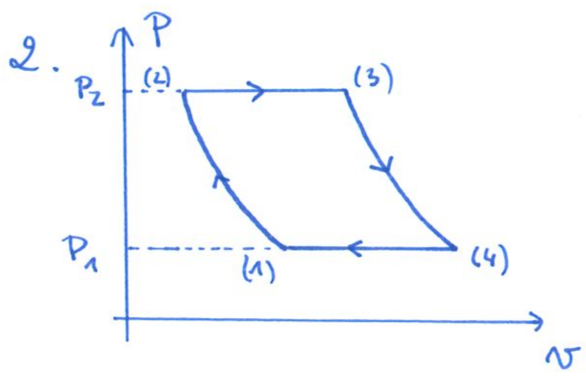
D'où $T_2 = T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ et $T_4 = T_3\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

et comme la transformation $\begin{cases} (4)\to(1) \text{ est isobare} : P_1 = P_4 \\ (2)\to(3) \text{ est isobare} : P_2 = P_3 \end{cases}$, donc $T_4 = T_3\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

AN : $T_2 = 300\left(\frac{1}{6,5}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} \simeq 512\,K$

$T_4 = 1300\left(\frac{6,5}{1}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} \simeq 761,5\,K$

2.



Rq : il est plus intéressant de représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron, car le "volume V" n'est pas défini ici (il s'agit d'un fluide en écoulement).

Le cycle est parcouru dans le sens horaire, c'est un cycle moteur.

3. Par définition, $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V}$ et la relation de Mayer pour un GP donne : $c_P - c_V = \frac{R}{M}$

(ou $C_P - C_V = nR$)

Ainsi $\gamma c_V - c_V = \frac{R}{M} \Rightarrow \underline{c_V = \frac{R}{M(\gamma-1)}}$ et $\underline{c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}}$

4. Les transformations (2)→(3) et (4)→(1) sont isobares. Le premier principe sur ces transformations peut s'écrire avec l'enthalpie :

$$\text{donc} \left\{ \begin{array}{l} \Delta H_{23} = Q_{23} \\ \Delta H_{41} = Q_{41} \end{array} \right.$$

$$\text{or } \Delta H_{23} = m \times c_p (T_3 - T_2) \qquad \text{où } m = 1\,kg$$
$$\Delta H_{41} = m \cdot c_p (T_1 - T_4)$$

D'où $\underline{Q_{23} = m c_p (T_3 - T_2)}$ et $\underline{Q_{41} = m c_p (T_1 - T_4)}$

$\underline{AN}$: $Q_{23} = 1 \times \frac{8{,}314 \cdot 1{,}4}{29 \cdot 10^{-3} \cdot (1{,}4-1)} \cdot (1300 - 512) \simeq \underline{791\,kJ}$

$Q_{41} = 1 \cdot \frac{8{,}314 \cdot 1{,}4}{29 \cdot 10^{-3} (1{,}4-1)} (300 - 761{,}5) \simeq \underline{-328\,kJ}$

5. On applique le premier principe sur un cycle complet :

$$\Delta H = W + Q_{23} + Q_{41} + \underbrace{\cancel{Q_{12}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{Q_{34}}}_{=0} \qquad \text{or } \Delta H = 0 \text{ sur un cycle}$$

Donc $\underline{W = -Q_{23} - Q_{41}}$

$\underline{AN}$: $\underline{W = -328\,kJ}$ (on trouve bien $W < 0$, il s'agit bien d'un moteur)

6. Dans le compresseur (étape (1)→(2)), le travail fourni au fluide est issu d'un arbre entraîné par la turbine.

Le premier principe sur l'étape (1)→(2) donne : $\Delta H_{12} = W_{12} + \underbrace{Q_{12}}_{=0 \text{ (adiabatique)}}$

avec $\Delta H_{12} = m c_p (T_2 - T_1)$

$\underline{AN}$: $W_{12} = \underline{213\,kJ} > 0$ (travail reçu par le gaz)

Or $W = W_{12} + W_{34} \Rightarrow W_{34} = W - W_{12}$

Le travail fourni par le gaz dans la turbine est donc $W_t = -W_{34} = W_{12} - W$

$\simeq 541\,kJ$

La part du travail fourni au niveau de la turbine utilisée pour entraîner le compresseur est : $\dfrac{W_{12}}{W_t} \simeq 39\%$

7. Déterminons $\eta = \dfrac{-W}{Q_{23}} = \dfrac{+Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \dfrac{Q_{41}}{Q_{23}} \overset{1^{er}\ pcpe}{=} 1 + \dfrac{mc_p(T_1 - T_4)}{mc_p(T_3 - T_2)}$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

AN : $\eta = 41\%$

Rq : Pour être rigoureux, il s'agit du premier principe appliqué à un système en écoulement (ou premier principe industriel) qu'il faut appliquer.

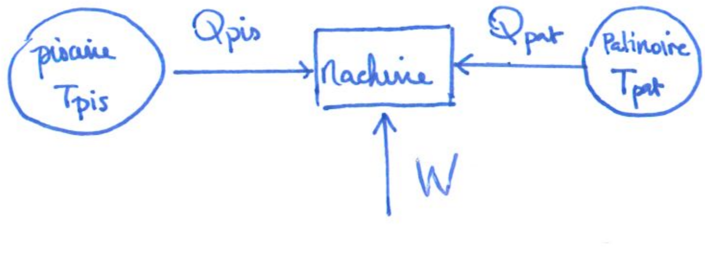
Exercice 2

1. Capacité de l'eau de la piscine : $C_1 = m_1 c_{eau} = 8{,}36.10^9\,J$

Capacité de la patinoire (liquide) : $C_2 = m_2 c_{eau} = 1{,}05.10^9\,J$

Capacité de la patinoire (glace) : $C_2' = m_2 c_{glace} = 5{,}2.10^8\,J$

2. On fait tout d'abord un schéma de l'installation :



Ici, la température des sources (patinoire et piscine) varie au cours de la transformation. On étudie alors un cycle élémentaire (et on suppose que sur un cycle élémentaire la température des sources est constante) :

Le 1er pcpe donne : $dU = \delta Q_{pis} + \delta Q_{pat} + \delta W \underset{\uparrow \text{ car cycle}}{=} 0$

Le 2nd pcpe donne : $dS = \delta S_e + \delta S_c \underset{\uparrow \text{ car cycle}}{=} 0$

avec $\delta S_e = \dfrac{\delta Q_{pis}}{T_{pis}} + \dfrac{\delta Q_{pat}}{T_{pat}}$ et $\delta S_c = 0$ (car réversible)

D'où
$$\begin{cases} \delta W = -\delta Q_{pis} - \delta Q_{pat} & (1) \\ \dfrac{\delta Q_{pis}}{T_{pis}} + \dfrac{\delta Q_{pat}}{T_{pat}} = 0 & (2) \end{cases}$$

Appliquons maintenant le premier principe à la patinoire :

$$dU_{pat} = C_2\, dT_{pat} = -\,\delta Q_{pat}$$

car δQ_{pat} = transfert fourni par la patinoire

et avec la piscine, cela donne : $C_1\, dT_{pis} = -\,\delta Q_{pis}$

D'où : $$C_1 \frac{dT_{pis}}{T_{pis}} + C_2 \frac{dT_{pat}}{T_{pat}} = 0$$

On intègre alors entre $t=0$ (où $T_{pis} = T_{pat} = T_i$) et un instant quelconque :

$$\int_{T_i}^{T_{pis}} C_1 \frac{dT_{pis}}{T_{pis}} + \int_{T_i}^{T_{pat}} C_2 \frac{dT_{pat}}{T_{pat}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \ln\left(\frac{T_{pis}}{T_i}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_{pat}}{T_i}\right) = 0$$

et notamment à l'instant où $T_{pat} = T_0$ et $T_{pis} = T_3$:

$$C_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_i}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_0}{T_i}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T_3}{T_i}\right)^{C_1} = \left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{C_2}$$

D'où $\underline{T_3 = T_i \left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{C_2/C_1}}$ AN : $\underline{T_3 \simeq 280{,}9\,K}$

Pour amener T_{pis} de T_i à T_3 et T_{pat} de T_i à T_0, la PAC a consommé un travail W_3 tel que :

$$W_3 = -Q_{pis} - Q_{pat} = \underline{C_1(T_3 - T_i) + C_2(T_0 - T_i)}$$

AN : $\underline{W_3 \simeq 174.10^6\,J = 174\,MJ}$

Même si la variation de température est faible, comme la taille des systèmes est très grande (et donc leur capacité également), le travail consommé est important.

3. Reprenons la relation (2) : $\frac{\delta Q_{pis}}{T_{pis}} + \frac{\delta Q_{pat}}{T_{pat}} = 0$

Lors du changement d'état, $T_{pat} = cste = T_0$

D'où $-C_1 \frac{dT_{pis}}{T_{pis}} = -\frac{\delta Q_{pat}}{T_0}$

On intègre entre le début et la fin de la solidification de la patinoire (et T_{pis} varie de T_3 à T_4) :

$$C_1 \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) = +\frac{1}{T_0}\int \delta Q_{pat} = +\frac{1}{T_0} \times \underbrace{Q_{pat,sol}}$$

transfert thermique reçu de la patinoire lors de la solidification.

En appliquant le premier principe à la patinoire lors de la transformation :

$$\Delta H_{pat} = m_2 \times l_{sol} = -Q_{pat,sol}$$

or $l_{sol} = -l_{fus}$, d'où $Q_{pat,sol} = +m_2 l_{fus}$

et $\underline{T_4 = T_3 \exp\left[\frac{m_2 l_{fus}}{C_1 T_0}\right]}$ AN : $\underline{T_4 \simeq 291{,}4\,K}$

Avec la relation (1) on trouve : $W_4 = - Q_{pis,sol} - Q_{pat,sol}$

et comme le 1er pcp appliqué à la piscine donne : $\Delta H_{pis} = C_1 (T_4 - T_3) = - Q_{pis,sol}$

On en déduit : $W_4 = C_1 (T_4 - T_3) - m_2 l_{fus}$ AN : $W_4 = 4030 \text{ MJ}$

4. Les résultats sont analogues à ceux trouvés à la question 2.

Pour la piscine, T_{pis} varie de T_4 à T_5

Pour la patinoire, T_{pat} varie de T_0 à T_2 (avec une capacité C_2' maintenant car l'eau est à l'état solide)

Alors : $\left(\frac{T_5}{T_4}\right)^{C_1} = \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{C_2} \Rightarrow T_5 = T_4 \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{C_2'/C_1}$ AN : $T_5 = 292{,}1 \text{ K}$

et $W_5 = C_1 (T_5 - T_4) + C_2' (T_2 - T_0)$ AN : $W_5 = 652 \text{ MJ}$

5. On applique le premier principe à la piscine :

$\Delta H_{pis} = Q_6$ avec $\Delta H_{pis} = C_1 (T_1 - T_5)$

AN : $Q_6 = C_1 (T_1 - T_5) \simeq 66\,000 \text{ MJ}$

6. L'énergie totale à fournir est $W_3 + W_4 + W_5 + Q_6$

Donc la durée totale de fonctionnement est $\Delta t = \frac{W_3 + W_4 + W_5 + Q_6}{P}$

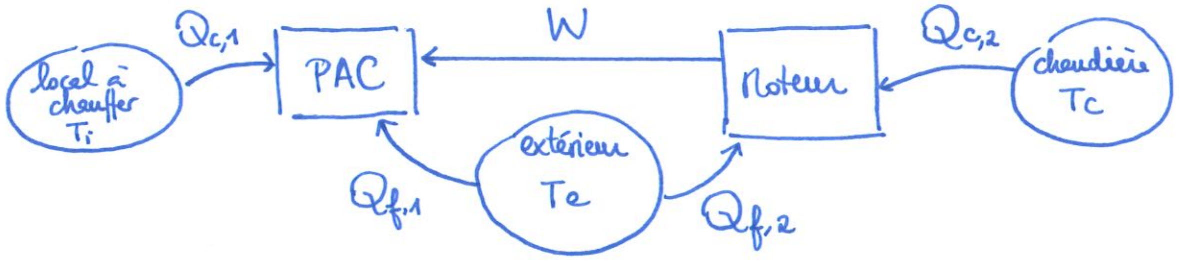
AN : $\Delta t \simeq 354\,000 \text{ s} = 4$ jours et 2h

Rq : pour chauffer la piscine sans pompe à chaleur : $\Delta t' = \frac{C_1 (T_1 - T_i)}{P} = 836\,000 \text{ s}$ = 9 jours et 16h

Utiliser une pompe à chaleur est plus efficace !

Exercice 3

1.



2. Par définition, $e = \dfrac{\text{partie utile}}{\text{partie à dépenser}}$

Ici, le transfert utile est $-Q_{c,1}$: on souhaite chauffer le local.
Il faut pour cela apporter le transfert thermique $Q_{c,2}$ afin de mettre en marche le moteur. Donc

$$e_{globale} = \frac{-Q_{c,1}}{Q_{c,2}}$$

Or $e_{PAC} = \dfrac{-Q_{c,1}}{W}$ et $\eta = \dfrac{W}{Q_{c,2}}$

D'où $e_{globale} = e_{PAC} \cdot \eta = \alpha e_C \cdot \alpha \eta_C = \alpha^2 e_C \eta_C$ où e_C = efficacité de Carnot
η_C = rendement de Carnot

Or pour une pompe à chaleur, $e_C = \dfrac{T_i}{T_i - T_e}$

et pour un moteur ditherme, $\eta_C = 1 - \dfrac{T_e}{T_c}$

D'où $e_{globale} = \alpha^2 \cdot \dfrac{T_i (T_c - T_e)}{T_c (T_i - T_e)}$

3. Pour que le dispositif soit plus avantageux que simplement chauffer l'intérieur avec la chaudière, il faut $-Q_{c,1} \geq Q_{c,2} \iff e_{globale} \geq 1$

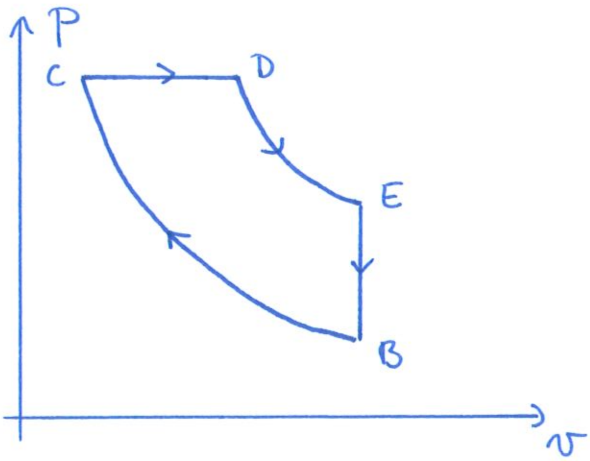
$$\iff \alpha^2 \geq \frac{T_c (T_i - T_e)}{T_i (T_c - T_e)}$$

Donc $\alpha_{min} = \sqrt{\dfrac{T_c (T_i - T_e)}{T_i (T_c - T_e)}}$ AN: $\alpha_{min} = \sqrt{\dfrac{400\,(20-5)}{293\,(400-278)}} \simeq 0{,}41$

Exercice 4 = Exercice 9 du TD22

Exercice 5

1.



2. Pour la transformation CD :

La transformation est isobare, le premier principe s'exprime alors :

$$\Delta H_{CD} = Q_{CD} \quad \text{avec} \quad \Delta H_{CD} = C_p(T_D - T_C) = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C)$$

D'où $\underline{Q_{CD} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C)}$

Pour la transformation EB :

La transformation est isochore, alors $W_{EB} = 0$ et le premier principe donne :

$$\Delta U_{EB} = \underline{Q_{EB} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_E)}$$

3. En appliquant le premier principe sur un cycle complet :

$$\Delta U = W + \underbrace{\cancel{Q_{BC}}}_{\substack{=0 \\ \text{adiabatique}}} + Q_{CD} + \underbrace{\cancel{Q_{DE}}}_{\substack{=0 \\ \text{adiabatique}}} + Q_{EB} = 0$$

car cyclique

D'où $W_f = -W = Q_{CD} + Q_{EB}$

et le rendement s'exprime $\eta = \frac{W_f}{Q_{CD}} = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}$

$$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{\frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_E)}{\frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C)} = \underline{1 - \frac{T_E - T_B}{\gamma(T_D - T_C)}}$$

4. La transformation BC est isentropique (adiabatique réversible), on applique la loi de Laplace : $PV^{\gamma} = cste \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = cste$

Donc $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

Le même raisonnement pour la transformation DE donne : $T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1}$

ainsi $T_B = T_C \cdot \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_C \, \alpha^{1-\gamma}$

$$T_E = T_D \cdot \left(\frac{V_D}{V_E}\right)^{\gamma-1} = T_D \cdot \left(\frac{V_D}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_D \, \beta^{1-\gamma}$$

car $V_E = V_B$

Or de plus, $P_C = P_D$ donc $\frac{T_C}{V_C} = \frac{T_D}{V_D}$ d'après la loi des gaz parfaits

$$\Rightarrow T_D = \frac{V_D}{V_C} T_C = \frac{\alpha}{\beta} T_C$$

Finalement $\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{\gamma (T_D - T_C)} = 1 - \frac{T_D \beta^{1-\gamma} - T_C \alpha^{1-\gamma}}{\gamma (T_D - T_C)}$

$$= 1 - \frac{\frac{\alpha}{\beta} \beta^{1-\gamma} T_C - T_C \alpha^{1-\gamma}}{\gamma \left(\frac{\alpha}{\beta} T_C - T_C\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{\eta = 1 - \frac{\alpha \beta^{1-\gamma} - \beta \alpha^{1-\gamma}}{\gamma (\alpha - \beta)}}$$

D'où l'expression recherchée.