

Correction TD2-1

Exercice 1

1. L'équation d'état du gaz parfait prévoit : $PV = nRT$

or $n = \frac{m}{M}$ où M = masse molaire

$$\Rightarrow P = \frac{\rho RT}{M} \text{ avec } \rho \text{ la masse volumique}$$

$$\text{D'où } \underline{\rho = \frac{PM}{RT}}$$

AN: Pour le diazote, $M(N_2) = 2 \times 14,0 = 28,0 \text{ g.mol}^{-1}$

$$\rho = \frac{10^5 \times 28,0 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times 273} \approx \underline{1,2336 \text{ kg.m}^{-3}}$$

On trouve une valeur proche de la valeur réelle.

2. À partir de $PV = \frac{mRT}{M} \Rightarrow \underline{v = \frac{V}{m} = \frac{RT}{PM}}$

AN: Pour l'eau, $M(H_2O) = 2 \times 1,0 + 16,0 = 18,0 \text{ g.mol}^{-1}$

$$v = \frac{8,314 \times (273 + 100)}{10^5 \times 18,0 \cdot 10^{-3}} \approx \underline{1,7 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}}$$

Le modèle du GP permet d'obtenir la valeur tabulée.

Exercice 2

1. Le système étudié est le gaz contenu initialement dans la bouteille.

Le système est fermé : la quantité de matière du système choisi ne varie pas au cours de la transformation subie.

2. Initialement, le système est à l'équilibre, à la pression $P_i = 15 \text{ bar}$ et à la température T extérieure.

À l'état final, le système est à l'équilibre, à la pression $\underline{P_f = P_{\text{ext}}}$ (équilibre mécanique) et la température reste égale à la température extérieure. $\underline{= 1 \text{ bar}}$

$$\text{Donc: } \begin{matrix} P_i, T, V_i \\ m \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} P_f, T, V_f \\ m \end{matrix}$$

3. L'équation d'état des gaz parfaits s'applique à l'état initial et l'état final.

$$\begin{cases} P_i V_i = nRT \\ P_f V_f = nRT \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_i V_i = P_f V_f$$

$$\text{AN: } V_f = \frac{15 \times 60}{1} = \underline{900L}$$

$$\text{Donc } \underline{V_f = \frac{P_i V_i}{P_f}}$$

Exercice 3

1. On note R le rayon du réservoir sphérique à déterminer.

Compte tenu des données de l'énoncé, on a :

$$V_{100} = \frac{4}{3} \pi R^3 + h \times \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Or le coefficient de dilatabilité du mercure est

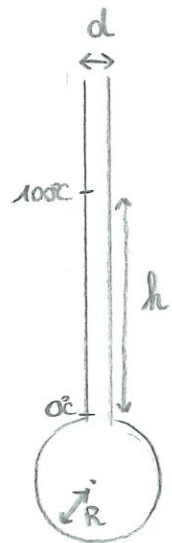
$$\alpha = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{d\theta} \Rightarrow \alpha d\theta = \frac{dV}{V_0}$$

En intégrant cette expression entre $\theta = 0^\circ\text{C}$ et $\theta = 100^\circ\text{C}$:

$$\alpha \Delta\theta = \frac{V_{100} - V_0}{V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{V_{100} - V_0}{\alpha \Delta\theta} = \frac{\pi h d^2}{4 \alpha \Delta\theta}$$

$$\text{Donc, comme } V_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \underline{R = \left(\frac{3 h d^2}{16 \alpha \Delta\theta} \right)^{1/3}}$$

$$\text{AN: } R = \left(\frac{3 \times 20 \cdot 10^{-2} \times (0,1 \cdot 10^{-3})^2}{16 \times 2 \cdot 10^{-4} \times 100} \right)^{1/3} \approx \underline{2,6 \text{ mm}}$$



Rq: α est en $(^\circ\text{C})^{-1}$ mais il n'est pas nécessaire de convertir car ici α s'exprime en fonction de l'inverse d'une variation de température.

Or ΔT (en K) = ΔT (en $^\circ\text{C}$)

2. La densité d_{Hg} du mercure est définie comme :

$$d_{\text{Hg}} = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_0} \text{ avec } \rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ (référence fixe)}$$

$$\text{or } \rho_{\text{Hg}} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho_{\text{Hg}} V = d_{\text{Hg}} \rho_0 \times V$$

À 0°C , $\underline{m = d_{\text{Hg},0} \times \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3}$

AN: $m = 13,2 \times 1000 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (2,6 \cdot 10^{-3})^3 \simeq \underline{9,7 \cdot 10^{-1} \text{ g}}$

À 100°C , m reste le même, donc :

$$d_{\text{Hg},100} \times \rho_0 \times V_{100} = d_{\text{Hg},0} \times \rho_0 \times V_0$$

$$\Rightarrow d_{\text{Hg},100} = d_{\text{Hg},0} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{\pi h d^2}{4}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Re: } d_{\text{Hg},100} = d_{\text{Hg},0} \times \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} = d_{\text{Hg},0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta V}{V_0}} \\ = d_{\text{Hg},0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \Delta \theta} \end{array} \right)$$

AN: $d_{\text{Hg},100} = 13,2 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi (2,6 \cdot 10^{-3})^3}{\frac{4}{3}\pi (2,6 \cdot 10^{-3})^3 + \frac{\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2} (0,1 \cdot 10^{-3})^2}{4}} \simeq \underline{12,9}$

Exercice 4

1. En utilisant l'équation d'état des GP : $PV_0 = n_0 RT = \frac{nRT}{M}$

$\Rightarrow \underline{V_0 = \frac{nRT}{PM}}$

A.N: $V_0 = \frac{1 \cdot 10^{-3} \times 8,314 \times (600 + 273)}{\underset{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ bar}}}{10^5} \times 80 \cdot 10^{-3} \times 2} \simeq \underline{4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 4,5 \cdot 10^{-1} \text{ L}}$

2. AN: $V_1 = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 8,314 \times (1600 + 273)}{10^5 \times 80 \cdot 10^{-3} \times 2} \simeq \underline{9,7 \cdot 10^{-1} \text{ L}}$

3. En réalité, une fraction des molécules Br_2 s'est dissociée



$$\begin{array}{ccc} n_0 & 0 & \\ n_0 - n_i & 2n_i & \text{à l'équilibre} \end{array}$$

où $x = \frac{n_i}{n_0}$ proportion des molécules Br_2 dissociées

Or à l'équilibre, la quantité totale de gaz est $n_{\text{gaz}} = n_0 - n_i + 2n_i = n_0 + n_i$

Ainsi le gaz parfait donne : $PV_1 = \underset{\text{pg}}{nRT} = (n_0 + x n_0) RT = n_0 RT (1+x)$

$\Rightarrow 1+x = \frac{n_0 RT}{PV_1} = \frac{nRT}{MPV_1}$

$$\Rightarrow \chi = \frac{mRT}{MPV_1} - 1$$

A.N: $\chi = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 8,314 \cdot (1600 + 273)}{2 \times 80 \cdot 10^{-3} \times 10^5 \times 1,195 \cdot 10^{-3}} - 1 \approx \underline{23\%}$

Exercice 5

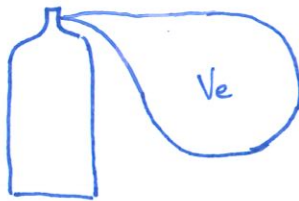
1. La transformation se fait à V et n constant.

Donc, en appliquant la loi de GP à l'état initial et l'état final: $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$

$$\frac{P_1}{\theta_1} = \frac{P_2}{\theta_2} \Rightarrow \underline{\theta_2 = \frac{P_2}{P_1} \theta_1}$$

A.N: $\theta_2 = 293 \cdot \frac{2,3}{2,1} = \underline{321K = 48^\circ C}$

2.



État initial :
 P_i, V_i
 T

État final : $\swarrow$ volume extrait
 $P_f, V_f = V_i + V_e$
 T

La transformation se fait à
 n et T constants

donc $PV = nRT = \text{cte}$

Ainsi $P_i V_i = P_f V_f = P_f (V_i + V_e) \Rightarrow V_e = \frac{P_i V_i}{P_f} - V_i = \underline{V_i \left(\frac{P_i}{P_f} - 1 \right)}$

A.N: $V_e = 60 \times \left(\frac{15}{1} - 1 \right) = \underline{840L}$

3. On gonfle un pneu jusqu'à $P_1 = 2,6 \text{ bar}$, de volume V_1 .

État initial : tout le gaz est dans la bouteille :

$$P_0 V_0 = n_0 RT \quad \text{avec } P_0 = 1,5 \text{ bar}$$

État final : dans le pneu : $P_1 V_1 = n_1 RT$

dans la bouteille : $P V_0 = n RT$

$$\text{or } n + n_1 = n_0$$

$$\Rightarrow \underline{P_1 V_1 + P V_0 = P_0 V_0}$$

$$\text{Donc } P = \frac{1}{V_0} (P_0 V_0 - P_1 V_1) = P_0 - \frac{P_1 V_1}{V_0}$$

$$\text{AN: } P = 15 - \frac{2,6 \cdot 50}{80} \approx \underline{13,4 \text{ bar}}$$

Tant que $P \geq P_1$, il est possible de gonfler le pneu.

Soit a le nombre de pneus gonflés, la pression P après n pneus gonflés est

$$P = P_0 - a \frac{P_1 V_1}{V_0}$$

$$\text{Il faut donc } P \geq P_1 \Leftrightarrow P_0 - a \frac{P_1 V_1}{V_0} \geq P_1$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{V_0 (P_0 - P_1)}{P_1 V_1}$$

AN: Il faut $a \leq 7,6$

On peut donc gonfler 7 pneus.

Exercice 6

1. Un coup de pompe consiste à tirer le piston de l'état ① (où $v=0$) à l'état ②

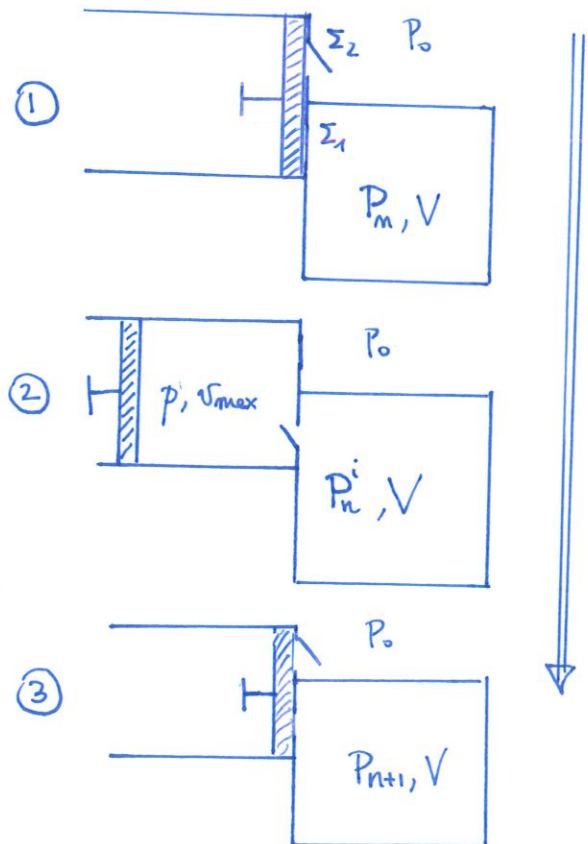
(où $v=v_{\max}$), avant de repousser le piston jusqu'à l'état ③ (où $v=0$)

Il suffit ici d'étudier l'équilibre mécanique à l'étape ②. À cet instant, Σ_1 est ouvert, donc la pression est la même dans le réservoir que dans la pompe : $p = P_n^i$ (P_n^i = pression intermédiaire)

Cela signifie que le gaz est homogène entre les deux volumes. Or initialement (à ①) tout le gaz est dans le réservoir, donc :

$$P_n V = P_n^i (V + v_{\max}) \quad \text{d'après l'éq d'état des GP} \\ (\text{car } T = \text{cte})$$

Or, dès que l'opérateur appuie sur le piston depuis l'état ②, la pression dans la pompe est légèrement plus élevée que dans le réservoir. Donc Σ_1 se ferme.



Cela signifie que la quantité de gaz à l'état ③ dans le réservoir est la même que celle dans le réservoir à l'état ② (aucun échange car Σ_1 est fermé).

$$\text{Donc } P_n^i V = P_{n+1} V \Rightarrow P_{n+1} = P_n^i$$

$$\text{Finalement : } P_n V = P_{n+1} (V + v_{\max}) \Rightarrow \underline{P_{n+1} = \left(\frac{V}{V + v_{\max}} \right) P_n = \alpha P_n}$$

avec $\alpha < 1$

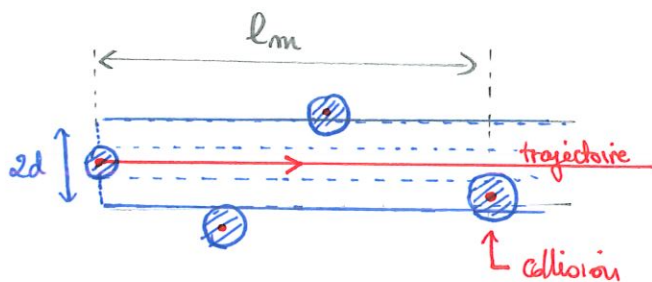
2. Il s'agit d'une suite géométrique de raison α :

$$\underline{P_n = \alpha^n P_0}$$

$$\text{Or } \alpha \in]0, 1[, \underline{P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 7

1.



Par définition, l_m est la distance moyenne parcourue par une particule entre deux chocs. Supposant qu'elle vient de subir un choc, le choc suivant se fait avec

la particule se trouvant sur le chemin de la particule suivie. Pour cela il faut que la particule "sur le chemin" se situe à une distance inférieure à d de la trajectoire de la particule suivie.

Ainsi, en supposant les particules de gaz comme uniformément distribuées, l_m est donc la hauteur du cylindre de base de rayon d , telle que au bout de l_m , seule une particule est rencontrée (avec laquelle il y a un choc).

2. Le volume du cylindre est donc $V^* = l_m \times \pi d^2$

Soit $n^* = \frac{N}{V}$ la densité particulaire du gaz. Ainsi le nombre de particules dans le volume V^* est $V^* \times n^* = 1$

$\uparrow$ par définition de l_m
 (1 seule particule dans ce volume)

$$\text{D'où } l_m \pi d^2 \frac{N}{V} = 1 \Rightarrow \underline{l_m = \frac{V}{\pi d^2 N}}$$

$$\text{or } n = \frac{N}{V_A} \text{ et } V_m = V/n \quad \text{D'où } \underline{l_m = \frac{V_m}{\pi d^2 N_A}}$$

3. AN: Dans les conditions normales de température et pression, $V_m = 24 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\text{donc } l_m = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (0,3 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \approx 10^{-7} \text{ m (ordre de grandeur)}$$

$$\Rightarrow \underline{l_m \sim 0,1 \mu\text{m}}$$

Exercice 8

État 1 Le système est à l'équilibre thermodynamique.

En particulier, il y a équilibre mécanique.

On applique le PFD sur le piston de masse m :

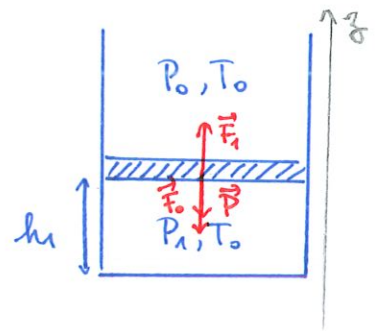
$$\underbrace{-P_0 S \vec{e}_3}_{\text{force de pression } \vec{F}_0} - \underbrace{mg \vec{e}_3}_{\text{poids}} + \underbrace{P_1 S \vec{e}_3}_{\substack{\uparrow \\ \text{force de pression } \vec{F}_1}} = \vec{0} \quad \uparrow \text{ à l'équilibre}$$

$$\Rightarrow (P_1 - P_0)S = mg \quad \text{donc } P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$$

on a bien $P_1 > P_0$ à cause du poids du piston!

Or l'équation d'état des GP donne: $P_1 V_1 = nRT_0$ avec $V_1 = h_1 \cdot S$

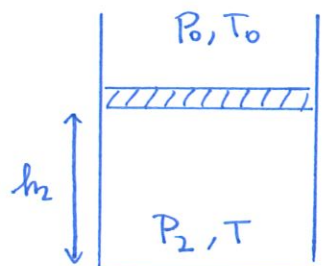
$$\text{d'où } \underline{h_1 = \frac{nRT_0}{P_1 S} = \frac{nRT_0}{P_0 S + mg}}$$



État 2 Le système est à l'équilibre mécanique, mais pas à l'équilibre thermique ($T \neq T_0$).

Ainsi, l'équilibre du piston donne toujours: $(P_2 - P_0)S = mg$

$$\Rightarrow P_2 = P_0 + \frac{mg}{S}$$



Cependant, on a maintenant $P_2 V_2 = nRT \Rightarrow \underline{h_2 = \frac{nRT}{P_0 S + mg}}$ on trouve bien $h_2 > h_1$

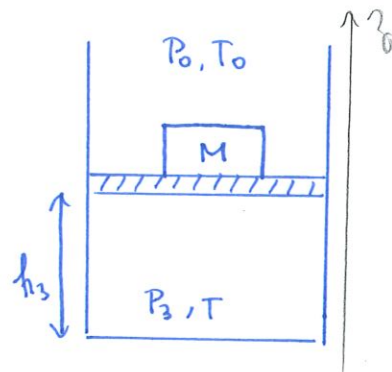
État 3 On suppose que l'équilibre mécanique est quasi instantané mais que l'équilibre thermique est beaucoup plus long à atteindre.

L'équilibre mécanique donne, avec un PFD sur le piston :

$$-mg - Mg - P_0 S + P_3 S = 0 \Rightarrow P_3 = P_0 + \frac{(m+M)g}{S}$$

L'équation d'état des GP donne : $P_3 V_3 = nRT$

$$\text{d'où } h_3 = \frac{nRT}{P_0 S + (m+M)g} \quad (\text{on trouve bien } h_3 < h_2)$$

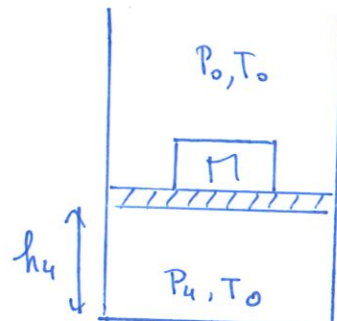


État 4 L'équilibre thermique est également atteint maintenant.

Donc la température est la même entre l'extérieure et le système.

L'équilibre est toujours vérifié, donc : $P_4 = P_0 + \frac{(m+M)g}{S}$

$$\text{L'éq. d'état des GP donne : } P_4 V_4 = nRT_0 \Rightarrow h_4 = \frac{nRT_0}{P_0 S + (m+M)g}$$



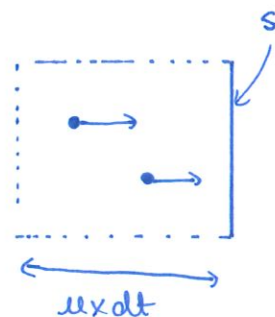
On trouve bien $h_4 < h_3$ de par la présence de M.

Exercice 9

1. Le nombre dN_s de particules sortant de l'enceinte correspond au nombre de particules dans le volume $S \times u \, dt$ ayant une vitesse dirigée vers le trou.

Au total, il y a $\frac{N}{V} \times S u \, dt$ particules dans le volume défini, et seul $\frac{1}{6}$ des particules ont la vitesse recherchée (par isotropie des vitesses).

$$\text{d'où } dN_s = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{V} \cdot S u \, dt$$



2. On peut écrire le bilan de particules entre t et $t+dt$:

$$N(t) = N(t+dt) + dN_s$$

↑ ↑ ↑
nbre de particules nbre de particules nbre de particules
dans l'enceinte à t à $t+dt$ mortes entre t et $t+dt$

$$\Rightarrow N(t+dt) - N(t) + dN_s = 0$$

$$\Rightarrow dN + \frac{N}{6V} su dt = 0$$

$$\text{D'où } \frac{dN}{dt} + \frac{su}{6V} N = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{dN}{dt} + \frac{N}{\tau} = 0} \quad \text{avec } \underline{\tau = \frac{6V}{su}}$$

Par analyse dimensionnelle: $\left[\frac{6V}{su} \right] = \frac{L^3}{L^2 \cdot L \cdot T^{-1}} = T$

Le temps caractéristique τ introduit est bien homogène à un temps.

3. La solution de l'équation différentielle est $N(t) = Ae^{-t/\tau}$

or à $t=0$, $N(0) = N_0$, d'où $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

4. On cherche $t_{1/2}$ tel que la pression ait diminué de moitié.

Or en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits: $PV = Nk_B T$

D'où à V et T constantes, $P \propto N$

On cherche finalement $t_{1/2}$ tel que $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$

$$\text{soit } N_0 e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{1/2}}{\tau} = \ln(2) \quad \text{D'où } \underline{t_{1/2} = \tau \ln(2)}$$