TD20 Correction

Exercice 1

1. Avec $\lambda_X = 0{,}50\,nm = 0{,}50.10^{-9}\,m$

$$E_X = \frac{hc}{\lambda_X} = \frac{6{,}63.10^{-34} \times 3.10^8}{0{,}50.10^{-9}} \simeq 3{,}98.10^{-16}\,J = 2{,}5\,keV$$

Le nombre de photons émis pendant $\Delta t = 1s$:

$$N = \frac{P_X \Delta t}{E_X} = 5{,}0.10^{14} \text{ photons}$$

2. Avec des ondes radio, avec $\nu_r = 1{,}5.10^5\,Hz$

$$E_r = h\nu_r = 6{,}63.10^{-34} \times 1{,}5.10^5 \simeq 9{,}94.10^{-29}\,J \simeq 6{,}2.10^{-10}\,eV$$

Le nombre de photons émis pendant $\Delta t = 1s$:

$$N = \frac{P\Delta t}{E_r} = \frac{1{,}2.10^3 \times 1}{9{,}94.10^{-29}} \simeq 1{,}21.10^{31} \text{ photons}$$

3. Pour des photons émis par la lampe sodium, $\lambda_s = 590\,nm$

$$E_s = \frac{hc}{\lambda_s} = \frac{6{,}63.10^{-34} \times 3.10^8}{590.10^{-9}} \simeq 3{,}37.10^{-19}\,J \simeq 2{,}1\,eV$$

Le nombre de photons émis pendant $\Delta t = 1s$:

$$N = \frac{P\Delta t}{E_s} = \frac{40 \times 1}{3.37.10^{-19}} \simeq 1{,}19.10^{20} \text{ photons}$$

Exercice 2

1. L'énergie cinétique des électrons ne dépend pas de la puissance de la lampe. La puissance de la lampe joue sur le nombre de photons émis par la lampe (et donc sur le nombre d'électrons arrachés sur la plaque).

2. L'énergie E d'un photon est utilisée pour arracher un électron, nécessitant un travail d'extraction W, et pour communiquer une énergie cinétique à l'électron arraché :

$$E = W + E_c$$

Or d'après la relation de Planck-Einstein : $E = \frac{hc}{\lambda}$

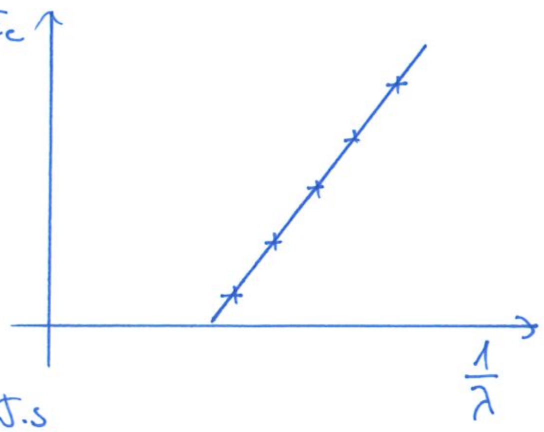
Donc $\frac{hc}{\lambda} = W + E_c \Rightarrow E_c = \underbrace{\frac{hc}{\lambda}}_{\text{énergie totale fournie à l'électron}} - \underbrace{W}_{\text{énergie utilisée pour l'extraire de la plaque}}$

3. En introduisant : $X = \frac{1}{\lambda}$ et $Y = E_c$

on trouve une relation théoriquement affine entre X et Y de la forme :

$$Y = aX + b \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = hc \\ b = -W \end{cases}$$

4. Avec les données du tableau (jusqu'à 436 nm), on fait une régression linéaire (attention à bien convertir nm → m, eV → J)



on obtient en paramètres : $\begin{cases} a = 1,995.10^{-25}\ \text{J.m} \\ b = -3,693.10^{-19}\ \text{J} \end{cases}$

Or $a = hc \Rightarrow h = \frac{a}{c} = \frac{1,995.10^{-25}}{3.10^{8}} \simeq 6,65.10^{-34}\ \text{J.s}$

on retrouve une valeur satisfaisante de la constante de Planck.

5. Lorsque $E < W$, le photon n'est pas assez énergétique pour arracher un électron. À la limite, lorsque $E = W$, le photon a juste assez d'énergie pour arracher l'électron (qui a alors une énergie cinétique nulle après arrachement).

6. Grâce à la régression linéaire, on a trouvé $b = -3,693.10^{-19}$ J

Or $b = -W$, donc :

$$W = \underline{3,693.10^{-19}\,J} \simeq \underline{2,31\,eV}$$

Exercice 3

1. Le pouvoir de résolution d'un microscope est limité par le phénomène de <u>diffraction</u>

2. Pour des ondes lumineuses visibles, $\lambda \sim 500\,nm$. C'est l'ordre de grandeur du pouvoir de résolution.

3. Un électron d'énergie cinétique E_c a une vitesse v telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

La quantité de mouvement d'un électron est donc : $p = mv = \sqrt{2mE_c}$

Ainsi sa longueur d'onde de De Broglie est donnée par :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$$

⚠ On ne peut écrire $\cancel{E_c = \frac{hc}{\lambda_{dB}}}$

<u>AN</u> : $$\lambda_{dB} = \frac{6,63.10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9,1.10^{-31} \times 100.10^{3} \times 1,6.10^{-19}}} \simeq 3,9.10^{-12}\,m = \underline{3,9\,pm}$$

C'est de l'ordre de grandeur des atomes : avec ces électrons, il est possible d'étudier la structure de molécules (fixes) et de cartographier la position d'atomes sur une surface.

Exercice 4

1. En ordre de grandeur, l'inégalité de Heisenberg donne $\Delta x . \Delta p \sim \hbar$

En prenant $p \sim |\Delta p| \simeq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{a}$

car l'électron est confiné autour du proton.

Donc $v = \frac{p}{m} \simeq \frac{\hbar}{ma} \simeq 1,2.10^{6}\ m.s^{-1}$

2. Avec la relation de De Broglie :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \sim 6.10^{-10}\ m$$

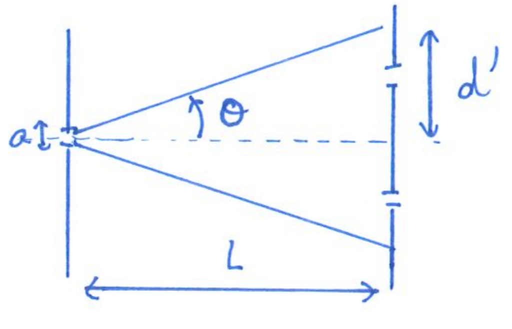
Il est normal de retomber sur la taille typique de l'atome. L'électron étant confiné autour du proton, sa fonction d'onde peut s'apparenter à celle d'une particule dans un puits infini, sa longueur d'onde (qui correspond à celle d'une onde stationnaire limitée sur une distance a) sera donc du même ordre de grandeur.

Exercice 5

1. Comme $\frac{1}{2} m\bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$

alors $\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\bar{v}} = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{m}{3k_BT}} = \frac{h}{\sqrt{3k_BTm}}$

AN: $\lambda_{dB} = \frac{6,63.10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1,38.10^{-23} \times 83 \times 4 \times 1,67.10^{-27}}} \simeq 1,38.10^{-10}\ m$



2. Lors d'une diffraction, on a

$$\theta \simeq \frac{\lambda_{dB}}{a} = 6,9.10^{-5}\ rad$$

Or la double fente étant distante de L, la tâche de diffraction sur le plan des doubles fentes a une taille $d' = L \times \tan\theta \simeq L\theta$ car $\theta \ll 1$

Donc $d' = L \times \frac{\lambda_{dB}}{a}$

AN: $d' \simeq 44\ \mu m$

La première fente remplit bien son rôle car la tâche de diffraction est bien grande que d la distance entre les fentes.

Les deux fentes sont donc bien atteignables par les atomes d'hélium.

3. On mesure une interfrange $i \simeq 10\mu m$

or $i = \frac{\lambda L'}{d}$ dans le cas de fentes d'Young.

Donc $\lambda_{dB}^{(2)} = \frac{i\, d}{L'} = \frac{10.10^{-6} \times 8.10^{-6}}{64.10^{-2}} \simeq 1{,}3.10^{-10}\ m$

On retrouve bien même ordre de grandeur que celui calculé à la première question.

Cette expérience démontre bien le caractère ondulatoire de la matière.

Exercice 6

1. L'électron étant confiné, ses niveaux d'énergie sont quantifiés.

Son énergie minimale est non nulle. On peut retrouver ce résultat à l'aide de l'inégalité de Heisenberg. En supposant l'électron confiné sur un intervalle $[0, L]$, cela impose une indétermination sur la position $\Delta x \simeq L$.

Or $\Delta p_x \cdot \Delta x \simeq \hbar \Rightarrow \Delta p_x \simeq \frac{\hbar}{L}$

Cela signifie que l'ordre de grandeur de la quantité de mouvement de l'électron doit être de l'ordre de Δp_x au minimum, $p_{min} \simeq \frac{\hbar}{L}$

Or l'énergie de l'électron en [0 et L se limite à son énergie cinétique. Donc :

$$E_c^{min} = \frac{p_{min}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} > 0$$

2. La fonction d'onde $\Psi(x,t)$ décrit l'état de l'électron et s'interprète comme l'amplitude de probabilité de présence de l'électron en M à t. La norme au carré de $\Psi(x,t)$ s'interprète comme densité de probabilité de présence de l'électron en M à t.

La probabilité dP de trouver l'électron en x (sur un intervalle de largeur dx centré sur x) à t est : $dP = |\Psi(x,t)|^2 dx$

3. L'électron est confiné entre $x=0$ et $x=L$, donc $\Psi(x,t) = 0$ pour $x<0$ ou pour $x>L$

probabilité de présence nulle.

Or par continuité de la fonction d'onde, $\begin{cases} \Psi(x=0,t) = 0 \\ \Psi(x=L,t) = 0 \end{cases}$

4. Par analogie avec la corde de Melde, on détermine λ_n la longueur d'onde de l'onde stationnaire avec les conditions aux limites énoncées ci-dessus.

Comme la distance entre deux noeuds consécutifs est $\frac{\lambda_n}{2}$, cela impose :

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

5. L'énergie de l'électron s'exprime $E = \frac{p^2}{2m}$ (car $E_p = 0$ entre $x=0$ et $x=L$)

Or d'après la relation de De Broglie, $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$

ainsi $E_n = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$

6. <u>AN</u>: pour $n=11$: $E_{11} = \dfrac{11^2 \times (6,63.10^{-34})^2}{8 . 9,1.10^{-31} (1,83.10^{-9})^2} \simeq \underline{2,18.10^{-18} J \simeq 13,6 eV}$

pour $n=12$: $E_{12} = \dfrac{12^2 \times (6,63.10^{-34})^2}{8 \times 9,1.10^{-31} (1,83.10^{-9})^2} \simeq \underline{2,60.10^{-18} J \simeq 16,2 eV}$

7. Pour que l'électron passe du niveau 11 au niveau 12, il faut qu'il absorbe un photon dont l'énergie correspond à $\Delta E = E_{12} - E_{11}$.

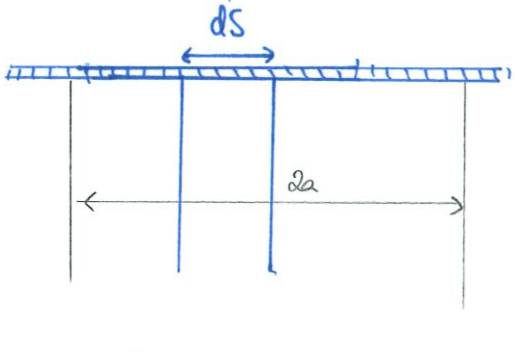
L'énergie du photon est donc $\underline{\Delta E = 4,2.10^{-19} J \simeq 2,6 eV}$

La longueur dans le vide du photon est : $\lambda = \underline{\dfrac{hc}{\Delta E}} = \dfrac{6,63.10^{-34} . 3.10^{8}}{4,2.10^{-19}} \simeq \underline{474 nm}$

8. D'après la "théorie des couleurs", lorsque une lumière est envoyée sur un système, une partie de son spectre est absorbée. Ici le β-carotène absorbe le 474 nm, donc dans l'ultraviolet. L'objet diffuse des autres longueurs d'onde et la couleur de l'objet est donc le <u>complémentaire du violet</u> (donc orange).

Tous les objets contenant le β-carotène auront une réponse similaire à lumière et <u>paraîtront orange</u>.

<u>Exercice 7</u>



1. Soit I l'intensité du laser, de section πa^2

L'énergie reçue pendant dt par une surface dS de la plaque est : $d\mathcal{E} = I dt \times dS$ (I = puissance/surface (en $W.m^{-2}$))

Or l'énergie est transmise sous forme de photons d'énergie $E = h\nu$

donc $d\mathcal{E} = \delta N \times h\nu$ où δN le nombre de photons absorbés.

Ainsi $\delta N = \dfrac{I\,dt}{h\nu} \cdot dS$

2. Chaque photon possède une quantité de mouvement $\vec{p} = \dfrac{h\nu}{c}\vec{e_z}$, donc pendant dt, la surface dS absorbe une quantité de mouvement

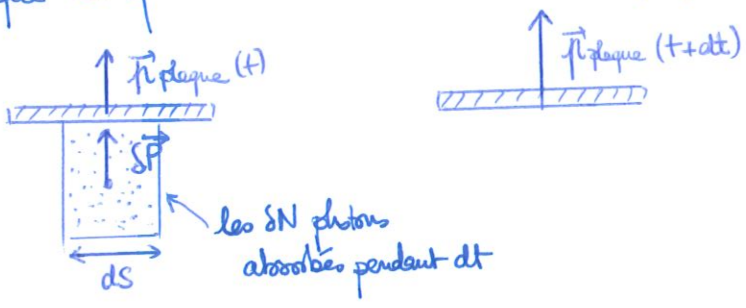
$$\delta\vec{P} = \delta N \times \vec{p}$$

$$= \frac{I\,dt}{h\nu} dS \cdot \frac{h\nu}{c}\vec{e_z} \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{P} = \frac{I}{c}\,dt\,dS\,\vec{e_z}$$

3. Notons $\vec{p}_{plaque}$ la quantité de mouvement de la plaque.

À t :

À t+dt



Pour l'instant, ne considérons que l'action due aux photons absorbés (on néglige le poids).
Par conservation de la quantité de mouvement :

$$\underbrace{\vec{p}_{plaque}(t) + \delta\vec{P}}_{\text{qté de mvt à } t} = \underbrace{\vec{p}_{plaque}(t+dt)}_{\text{qté de mvt à } t+dt}$$

Donc $\quad d\vec{p}_{plaque} = \vec{p}_{plaque}(t+dt) - \vec{p}_{plaque}(t) = \delta\vec{P} = \dfrac{I}{c}\,dt\,dS\,\vec{e_z}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_{plaque}}{dt} = \frac{I}{c}\,dS\,\vec{e_z} = d\vec{F}$$ (th de qté de mvt appliqué à la plaque)

On voit que l'action des photons absorbés peut être modélisée par une force $d\vec{F}$.
La plaque "a gagné" la quantité des photons absorbés.

or $d\vec{F} = p_{rad}\,dS\,\vec{e_z}$, donc $p_{rad} = \dfrac{I}{c}$

4. La force totale de pression de radiation est l'intégrale de $d\vec{F}$ sur toute la surface du faisceau (on somme la force $d\vec{F}$ de chaque portion dS de la surface éclairée).

Or l'intensité étant uniforme sur la surface éclairée,

$$\vec{F} = p_{rad} \times \underbrace{\left(\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}_{\text{section du faisceau.}} \vec{e_z} = \underline{\frac{I}{c}\pi\frac{a^2}{4}\vec{e_z}}$$

5. Afin de faire léviter la plaque, il faut que la force de pression de radiation compense le poids de la plaque : $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$ à l'équilibre

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{P} = mg\vec{e_z}$$

or $m = \rho \times L^2 e$

$$\Rightarrow \frac{I}{c} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \rho g L^2 e$$

$$\Rightarrow \underline{I = \frac{4\rho g L^2 e c}{\pi a^2}}$$

<u>AN</u> : $I = \dfrac{4 \times 1500 \times 9{,}8 \times (7.10^{-3})^2 . (10.10^{-6}) . 3.10^8}{\pi \times (5.10^{-3})^2} \simeq \underline{1{,}1.10^8\ W.m^{-2}}$

$= \underline{11\ kW.cm^{-2}}$