

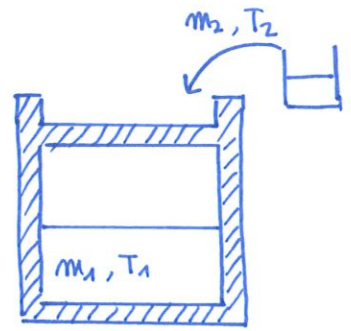
Correction TD22

Exercice 1

État initial $\longrightarrow$ État final

m_1 à T_1 $m_1 + m_2$ à T_f

m_2 à T_2



1. On applique premier principe de la thermodynamique au système $\{m_1 + m_2 \text{ d'eau}\}$

$$\Delta H = Q \quad (\text{la transformation est monobare})$$

or $Q = 0$ car la paroi du calorimètre sont calorifugées

$$\text{Donc } \Delta H = 0$$

$$\text{Par extensivité de } H : \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

où ΔH_1 = variation pour la masse m_1 d'eau

$$= m_1 c (T_f - T_1)$$

avec c = capacité thermique de l'eau liquide

ΔH_2 = variation pour la masse m_2 d'eau

$$= m_2 c (T_f - T_2)$$

$$\text{D'où } \Delta H = 0 = m_1 c (T_f - T_1) + m_2 c (T_f - T_2)$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) c T_f = (m_1 T_1 + m_2 T_2) c$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{AN: } T_f \approx 32,8^\circ\text{C}$$

2. On note C_0 la capacité thermique du calorimètre (et ses accessoires)

On reprend le même raisonnement que précédemment, en incluant le calorimètre dans le système.

Par extensivité de H , on a :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_{\text{calor.}}$$

où $\Delta H_{\text{calor.}}$ = variation d'enthalpie du calorimètre

$$= C_0(T_f - T_1)$$

↑ initialement à l'équilibre à la température T_1 .

$$\text{Finalement } \Delta H = 0 \Rightarrow m_1 c (T_f - T_1) + C_0(T_f - T_1) + m_2 c (T_f - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{m_2 c (T_2 - T_f)}{T_f - T_1} - m_1 c$$

$$\Rightarrow C_0 = \left(\frac{m_2 (T_2 - T_f) - m_1 (T_f - T_1)}{T_f - T_1} \right) c$$

$$\text{AN: } C_0 = \left(\frac{71.10^{-3} (50 - 31,3) - 35.10^{-3} (31,3 - 20)}{31,3 - 20} \right) \times 4,18 \approx \underline{94 \text{ J.K}^{-1}}$$

$$\text{La valeur en eau serait } \mu = \frac{C_0}{c} \approx 22,5 \text{ g}$$

(le calorimètre a la même capacité thermique que 22,5 g d'eau liquide).

3. État initial État final

masse m d'eau
à T_1

→

masse m d'eau
+ calorimètre à T_f

calorimètre à T_1

solide à T_2

→

solide à T_f

On note C_s la capacité thermique de l'échantillon métallique.

Avec le même raisonnement que précédemment, on applique 1^{er} pcp de la thermo au système { masse m d'eau + calorimètre + solide }

$$\Delta H = Q = 0$$

$$\text{or } \Delta H = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{calor.}} + \Delta H_{\text{solide}}$$

$$= m c (T_f - T_1) + C_0 (T_f - T_1) + C_s (T_f - T_2)$$

et comme les états A et B sont les mêmes et que U est une fonction d'état

$$\underline{\Delta U^{(2)} = \Delta U^{(1)} = \frac{3P_0V_0}{\gamma-1}}$$

3. On applique le 1^{er} pape de la thermo:

* pour la transformation A₁B: $\Delta U^{(1)} = W^{(1)} + Q^{(1)}$

$$\Rightarrow Q^{(1)} = \Delta U^{(1)} - W^{(1)} = \frac{3P_0V_0}{\gamma-1} + P_0V_0 = \underline{\frac{\gamma+2}{\gamma-1} P_0V_0}$$

* pour la transformation A₂B: $\Delta U^{(2)} = W^{(2)} + Q^{(2)}$

$$\Rightarrow Q^{(2)} = \Delta U^{(2)} - W^{(2)} = \frac{3P_0V_0}{\gamma-1} + 2P_0V_0 = \underline{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} P_0V_0}$$

Rq: $W^{(1)} \neq W^{(2)}$ et $Q^{(1)} \neq Q^{(2)}$

Cela montre que les transferts d'énergie dépendent du trajet suivi lors de la transformation.

Exercice 3

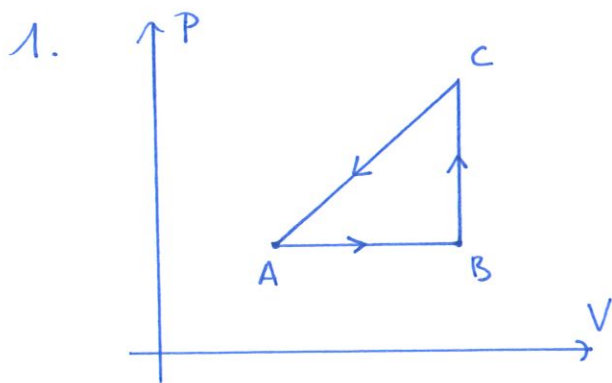
On comprime 1 mole de gaz de $2V_0$ à V_0 à température constante T_0 .

Or on précise que la transformation se fait très lentement donc cela signifie que la transformation est quasi-statique et que l'équilibre mécanique est établi à chaque instant: $P = P_e$

$$\text{Ainsi } W = - \int_{2V_0}^{V_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quasi-statique}}}{P_e} dV = - \int_{2V_0}^{V_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eq}^e \text{ d'état}}}{P} dV = - \int_{2V_0}^{V_0} \frac{RT_0}{V-b} dV = -RT_0 \ln\left(\frac{V_0-b}{2V_0-b}\right)$$

$$\underline{\text{D'où } W = RT_0 \ln\left(\frac{2V_0-b}{V_0-b}\right) > 0}$$

Exercice 4



AB = détente ^{P = constante} isobare
↳ V augmente

BC = compression isochore
^{P augmente} V = constante

2. Les transformations sont considérées quasi-statiques, il y a équilibre mécanique à chaque instant a priori et $P_e = P$.

* Entre A et B :
$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P_e dV = - \int_{V_A}^{V_B} P_A dV = \underline{-P_A(V_B - V_A)}$$

(C'est l'opposé de l'aire du rectangle sous la transformation AB)

* Entre B et C :
$$W_{BC} = 0 \quad (\text{transformation isochore})$$

* Entre C et A :
$$W_{CA} = - \int_{V_C}^{V_A} P_e dV = - \int_{V_C}^{V_A} P dV$$

or entre C et A, P évolue linéairement avec V : $P = P_A + \frac{P_C - P_A}{V_C - V_A}(V - V_A)$

donc
$$W_{CA} = - \int_{V_C}^{V_A} \left(P_A + \frac{P_C - P_A}{V_C - V_A}(V - V_A) \right) dV = -P_A(V_A - V_C) - \frac{P_C - P_A}{V_C - V_A} \left[0 - \frac{(V_C - V_A)^2}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{W_{CA} = P_A(V_C - V_A) + \frac{1}{2}(P_C - P_A)(V_C - V_A)}$$

Sur le cycle :
$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = \underline{\frac{1}{2}(P_C - P_A)(V_C - V_A)} > 0 \quad (\text{car } V_B = V_C)$$

C'est tout simplement l'aire du triangle constituant le cycle.

Exercice 5

1. Par définition $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et la relation de Mayer donne: $C_p - C_v = nR$ (par le GP)

$$\text{Ainsi } \gamma C_v - C_v = C_v(\gamma - 1) = nR \Rightarrow \underline{C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \underline{C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}}$$

2. On s'intéresse au gaz parfait (n moles).

État initial

$$P_1 = P_a$$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$$

$$T_1$$

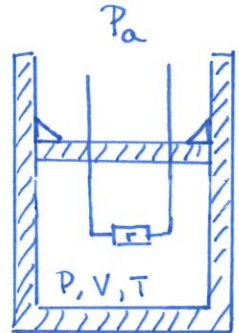
État final

$$P_2$$

$$\underline{V_2 = V_1} \quad (\text{transformation isochore})$$

$$T_2$$

↑
car le piston est bloqué



Il reste à déterminer P_2 et T_2 .

* Détermination de T_2 : $W_e = rI^2\tau$ (énergie fournie au gaz par effet Joule)

Ainsi, avec le premier principe de la thermodynamique: $\Delta U = W_{\text{pression}} + W_e + Q$

or $W_{\text{pression}} = 0$ (transf isochore)

$Q = 0$ (transf adiabatique)

$$\text{Donc } \Delta U = C_v \Delta T = W_e$$

$$\Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = rI^2\tau$$

$$\Rightarrow \underline{T_2 = T_1 + \frac{(\gamma - 1)rI^2\tau}{nR}} > T_1$$

* Détermination de P_2 :

Avec l'équation d'état des gaz parfaits: $P_2 V_2 = nRT_2$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{nRT_1}{V_1} + (\gamma - 1) \frac{rI^2\tau}{V_2}$$

$$\Rightarrow \underline{P_2 = P_1 + (\gamma - 1) \frac{rI^2\tau}{V_1}} > P_1$$

La pression et la température ont augmenté lors de la transformation.

3. Si le piston n'est plus bloqué, alors la transformation n'est plus isochore, mais est monobare.

État initial :

$$P_1 = P_a$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{nRT_1}{P_1}$$

État final

$$\frac{P_2' = P_a}{V_2' / T_2'} \leftarrow \text{car transformation monobare.}$$

Il reste à déterminer V_2' et T_2' .

* Détermination de T_2' :

Le premier principe, dans le cas d'une transformation monobare, s'écrit :

$$\Delta H = W_e + Q \quad \text{avec } Q = 0 \text{ car la transformation est adiabatique.}$$

$$\Rightarrow C_p \Delta T = W_e = r I^2 \tau$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_2' - T_1) = r I^2 \tau \quad \Rightarrow \quad \underline{T_2' = T_1 + \frac{(\gamma - 1) r I^2 \tau}{\gamma n R}}$$

* Détermination de V_2' :

Avec l'équation d'état des gaz parfaits : $P_2' V_2' = n R T_2'$

$$\text{d'où } V_2' = \frac{n R T_1}{P_2'} + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{r I^2 \tau}{P_2'} \quad \text{or } P_2' = P_1 = P_a$$

$$\Rightarrow \underline{V_2' = V_1 + \frac{(\gamma - 1) r I^2 \tau}{\gamma P_a}}$$

Le volume augmente suite à l'augmentation de la température.

4. On remarque que $\underline{T_2' < T_2}$ (car $\frac{(\gamma - 1) r I^2 \tau}{\gamma n R} < \frac{(\gamma - 1) r I^2 \tau}{n R}$ car $\gamma > 1$)

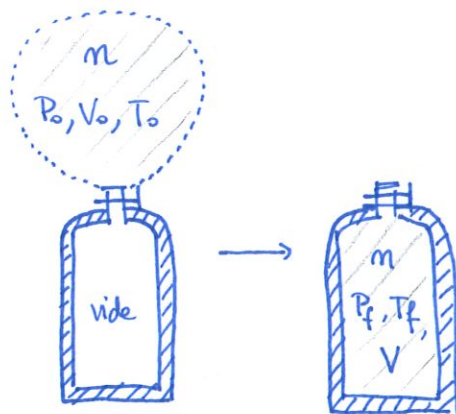
Dans le premier cas, toute l'énergie fournie par effet Joule sert à l'augmentation de l'énergie interne du gaz (donc à l'augmentation de T).

Dans le second cas, une partie de l'énergie fournie par effet Joule sert à compenser le travail résistant des forces de pression extérieure (car il s'agit d'une détente). Donc l'énergie interne subit une plus faible augmentation.

Exercice 6

La difficulté ici est de définir un système fermé.

On choisit comme système les n moles de gaz qui seront finalement contenues dans la bouteille.



Initialement : le système occupe un volume $V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$

Le système subit une transformation rapide, on peut la considérer comme adiabatique (de plus les parois de la bouteille sont calorifugées, donc après la fermeture du robinet, aucun échange thermique n'est possible).

Le premier principe appliqué au système s'écrit : $\Delta U = W + \overset{0}{Q} = W$

or $W = - \int_{V_i}^{V_f} P_0 dV$ où P_0 est la pression extérieure
 V_i, V_f délimitant le volume balayé par la frontière entre le système et l'air ambiant.

or à l'instant initial où le robinet est ouvert, le volume disponible pour le gaz est $V_0 + V$ (comme pour la détente de Joule/Gay-Lussac, la détente se fait sans travail des forces de pression), et lorsque le robinet est fermé, le volume restant au système est V (la frontière a alors balayé un volume V_0).

$$\text{d'où } W = - \int_{V_i}^{V_f} P_0 dV = -P_0 (0 - V_0) = \underline{P_0 V_0}$$

$$\text{et alors } \Delta U = C_V \Delta T = P_0 V_0 \Rightarrow C_V (T_f - T_0) = nRT_0 \text{ d'où } T_f = \frac{C_V + nR}{C_V} T_0$$

$$\text{or } C_V + nR = C_P \Rightarrow \underline{T_f = \frac{C_P}{C_V} T_0 = \gamma T_0 = \frac{7}{5} T_0} \text{ pour l'air diatomique}$$

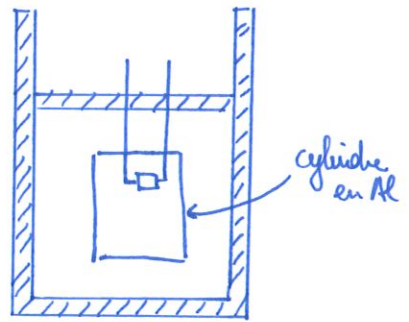
Enfin, avec l'éqⁿ d'état des gaz parfaits, on trouve :

$$P_f V_f = nRT_f \text{ or } \underline{P_f = P_0}, \text{ donc } V_f = \frac{nRT_f}{P_0} = \frac{T_f}{T_0} V_0 \Rightarrow \underline{V_f = \gamma V_0}$$

Exercice 7

On s'intéresse au système {cylindre d'Al. + résistance}

La transformation est adiabatique et monobare.



⚠ Ici, le travail électrique reçu par le système dépend de la température Θ !

Il faut donc s'intéresser à une transformation élémentaire.

* Entre t et $t+dt$, le 1^{er} pape s'écrit : $dH = \delta W_e + \delta Q = 0$

avec $\delta W_e = \frac{E^2}{R} dt$ où $\frac{E^2}{R}$ = puissance reçue par effet Joule.

et par extensivité de H : $dH = dH_{Al} + dH_R$
 $= mc_{Al} d\Theta + \mu d\Theta$

$$\text{D'où } (mc_{Al} + \mu) d\Theta = \frac{E^2}{R_0(1+\alpha\Theta)} dt$$

$$\text{cela se réécrit } (1+\alpha\Theta) d\Theta = \frac{E^2}{R_0(mc_{Al} + \mu)} dt$$

* en intégrant entre le début de la transformation et la fin ($t = \tau$) :

$$\int_{\Theta_i}^{\Theta_f} (1+\alpha\Theta) d\Theta = \int_0^\tau \frac{E^2}{R_0(mc_{Al} + \mu)} dt$$

$$\Rightarrow (\Theta_f - \Theta_i) + \frac{\alpha}{2} (\Theta_f^2 - \Theta_i^2) = \frac{E^2 \tau}{R_0(mc_{Al} + \mu)}$$

$$\Rightarrow mc_{Al} = \frac{E^2 \tau}{R_0 \left((\Theta_f - \Theta_i) + \frac{\alpha}{2} (\Theta_f^2 - \Theta_i^2) \right)} - \mu$$

AN : On obtient $c_{Al} = 899 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

$$\text{et } \underline{c_{Al,m} = c_{Al} \times \rho(Al) = 24,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$$

Exercice 8

1. On considère le système $\{\text{gaz} + \text{piston}\}$.

L'énergie totale du système est donc $E_{\text{tot}} = E_{c, \text{piston}} + E_{p, \text{piston}} + U_{\text{piston}} + U_{\text{gaz}}$

et à l'état initial : $E_{c, \text{piston}}^{(i)} = \frac{1}{2} m v^2$ (repos), $E_{p, \text{piston}}^{(i)}$

à l'état final : $E_{c, \text{piston}}^{(f)} = 0$ (repos), $E_{p, \text{piston}}^{(f)} = E_{p, \text{piston}}^{(i)}$

↑
car la position du piston est la même à l'état final qu'à l'état initial.

$$\begin{aligned} \text{Finalement : } \Delta E_{\text{tot}} &= \Delta E_{c, \text{piston}} + \Delta E_{p, \text{piston}} + \Delta U_{\text{piston}} + \Delta U_{\text{gaz}} \\ &= W + Q \end{aligned}$$

or $W = 0$ (pas de travail de forces de pression, ou autre travail non déjà pris en compte dans E_p)

$Q = 0$ (parois adiabatiques)

$$\begin{aligned} \text{Donc } \Delta E_{c, \text{piston}} + \Delta E_{p, \text{piston}} + \Delta U_{\text{piston}} + \Delta U_{\text{gaz}} &= 0 \\ \underbrace{-\frac{1}{2} m v^2} \quad \underbrace{= 0} \end{aligned}$$

or $C_{\text{piston}} \ll C_{\text{gaz}}$, donc $\Delta U_{\text{piston}} \ll \Delta U_{\text{gaz}}$

$$\text{D'où } \underline{\Delta U_{\text{gaz}} = -\Delta E_{c, \text{piston}} = \frac{1}{2} m v^2} \quad \text{AN: } \underline{\Delta U_{\text{gaz}} = 125 \text{ J}}$$

2. Le gaz étant diatomique : $\Delta U_{\text{gaz}} = C_v \Delta T = \frac{5}{2} n R \Delta T$

$$\Rightarrow T_f = \frac{2}{5} \frac{\Delta U_{\text{gaz}}}{n R} + T_0 = \frac{2}{5} \frac{\Delta U_{\text{gaz}}}{\frac{P_0 V_0}{T_0}} + T_0$$

$$\Rightarrow \underline{T_f = T_0 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{\Delta U_{\text{gaz}}}{P_0 V_0} \right)}$$

$$\text{AN: } T_f = 300 \left(1 + \frac{2 \times 125}{5 \times 10^5 \times 60 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$\underline{T_f \approx 302,5 \text{ K}}$$

La température du gaz a augmenté due au mouvement du piston initial.

3. A priori il n'est pas possible de définir à chaque instant la température et la pression du gaz car il y a des inhomogénéités (l'état d'équilibre n'est pas atteint à chaque instant).

4. Si l'on ne néglige plus la capacité thermique du piston :

$$\Delta U_{\text{piston}} + \Delta U_{\text{gaz}} = -\Delta E_{c, \text{piston}}$$

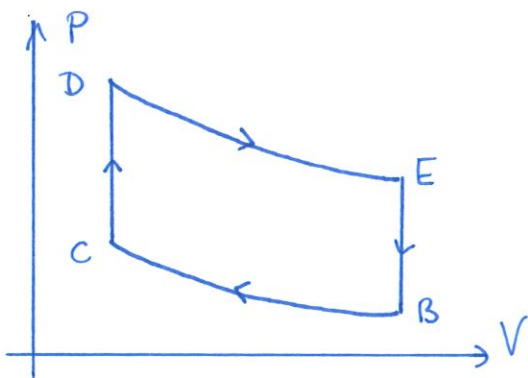
$$\Rightarrow C_{\text{piston}} \Delta T + \frac{5}{2} n R \Delta T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow (C_{\text{piston}} + \frac{5}{2} n R) (T_f - T_0) = \frac{1}{2} m v^2$$

La température finale T_f calculée serait plus faible.

Exercice 9

1.



Les étapes les plus simples à représenter sont les étapes CD et EB.

Il est possible de représenter le cycle car toutes les transformations sont quasi-statiques.

2. Les transformations $C \rightarrow D$ et $E \rightarrow B$ sont isochores, donc $W_{CD} = W_{EB} = 0$

On détermine Q_{CD} et Q_{EB} à l'aide du premier principe :

* Transformation $C \rightarrow D$: $\Delta U_{CD} = Q_{CD} \Rightarrow \underline{C_V (T_D - T_C) = Q_{CD}}$

* Transformation E → B: $\Delta_{EB}U = Q_{EB} \Rightarrow \underline{Q_{EB} = C_V(T_B - T_E)}$

3. Pour déterminer W_f , il faut déterminer W_{BC} et W_{DE} .

* Transformation B → C:

1^{er} type: $\Delta_{BC}U = Q_{BC} + W_{BC} = W_{BC}$ car $Q_{BC} = 0$ (adiabatique)
 $\Rightarrow \underline{W_{BC} = C_V(T_C - T_B)}$

* Transformation D → E:

1^{er} type: $\Delta_{DE}U = Q_{DE} + W_{DE} = W_{DE}$ car $Q_{DE} = 0$ (adiabatique)
 $\Rightarrow \underline{W_{DE} = C_V(T_E - T_D)}$

Alors $\Delta U = W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EB}$
 Δ

Autre méthode: sur un cycle: $\Delta U = W_f + \underbrace{Q_{BC}}_{=0} + Q_{CD} + \underbrace{Q_{DE}}_{=0} + Q_{EB}$
 or $\Delta U = 0$ pour un cycle. Δ car W_f est le travail fourni

Donc $\underline{W_f = +Q_{CD} + Q_{EB}}$

Ainsi le rendement est $\eta = \frac{W_f}{Q_{CD}} = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}$

$\Rightarrow \underline{\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C}}$

4. Lors d'une transformation réversible adiabatique d'un gaz parfait, on peut appliquer la loi de Laplace: $PV^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte}$

Donc $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ et $T_E V_E^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ (car $V_B = V_E$, $V_C = V_D$)

Le rapport donne: $\frac{T_B}{T_C} = \frac{T_E}{T_D} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{\gamma-1}$

et alors
$$\frac{T_E - T_B}{T_D - T_C} = \frac{T_D \alpha^{1-\gamma} - T_C \alpha^{1-\gamma}}{T_D - T_C} = \alpha^{1-\gamma}$$

D'où $\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$

Exercice 10

1. Système : { colonne + eau + contenu }

On travaille sous $P_{ext} = P_{atmosphérique} = \text{cte} \rightarrow \text{monobare}$

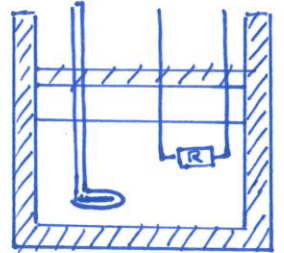
On applique le 1^{er} principe :

$$\Delta H = W_{a\text{ute}} + Q \quad \text{or } Q = 0 \text{ car adiabatique}$$

avec $\Delta H = C_T^{(0)} (T_f - T_i)$ et $W_{a\text{ute}} = UI \Delta t = RI^2 \Delta t$

D'où $C_T^{(0)} = \frac{RI^2 \Delta t}{T_f - T_i}$

AN: $C_T^{(0)} = \frac{250 \times 0,5^2 \times 13 \times 60}{16 - 14} \approx 24,4 \text{ kJ.K}^{-1}$



2. Si l'on ne néglige plus C_R , il faut remplacer $C_T^{(0)}$ par $C_T + C_R$ dans le calcul précédent.
(la résistance a la même température initiale et la même température finale)

D'où $C = \frac{RI^2 \Delta t}{T_f - T_i} - C_R$

AN: $C_T \approx 24,1 \text{ kJ.K}^{-1}$

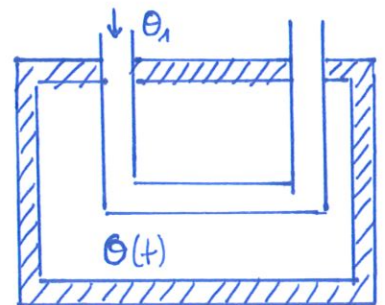
Négliger C_R revient à faire une erreur de 1%.

3. Soit D le débit massique.

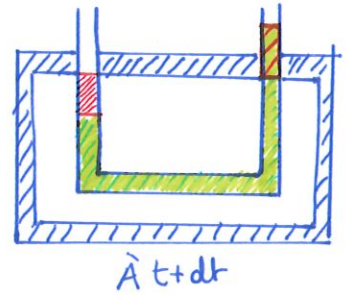
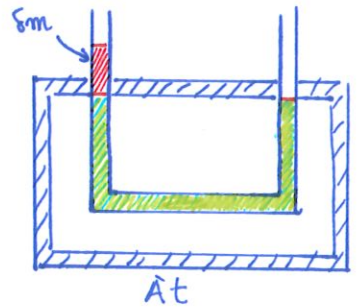
Alors pendant dt , une masse $\Delta m = D dt$ entre dans le serpentin.

Notons $M(t)$ la masse de gaz dans le serpentin à un instant t . Or si l'écoulement est stationnaire, cela signifie que $M(t)$ ne varie pas au cours du temps. Donc $M(t) = M(t+dt)$.

Donc la masse entrant pendant dt est égale à la masse sortant durant dt .



4. On choisit comme système : { calorimètre, le gaz dans le serpentin à un instant t (en vert ■) et le gaz entrant pendant dt (en rouge ■) }



On applique le premier principe sur le système entre t et $t+dt$:
(évolution monobare sous P_{atm})

$$dH = \delta W_{autre} + \delta Q$$

or $\delta Q = 0$ et $\delta W_{autre} = 0$
(adiabatique) (per d'autre travail que la pression)

D'où $dH = 0$

Par extensivité : $dH = dH_{calorimètre} + dH_{gaz}$

avec $dH_{calorimètre} = C_T (\theta(t+dt) - \theta(t)) = C_T d\theta$

$$dH_{gaz} = H_{gaz}(t+dt) - H_{gaz}(t)$$

or $H_{gaz}(t) = \underbrace{H_{serp.}(t)}_{\text{enthalpie du gaz dans le serpentin}} + \underbrace{H_{sm,e}}_{\text{enthalpie de la masse } sm \text{ entrant (en ■)}}$

$$H_{gaz}(t+dt) = \underbrace{H_{serp.}(t+dt)}_{\text{enthalpie du gaz dans le serpentin}} + \underbrace{H_{sm,s}}_{\text{enthalpie de la masse } sm \text{ sortant (en ■)}}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } dH &= C_T d\theta + H_{serp.}(t+dt) + H_{sm,s} - H_{serp.}(t) - H_{sm,e} \\ &= \underline{C_T d\theta + dH_{serp.} + H_{sm,s} - H_{sm,e}} \end{aligned}$$

5. On suppose $dH_{serp.} = 0$, d'où

$$C_T d\theta + H_{sm,s} - H_{sm,e} = 0$$

$$\Rightarrow C_T d\theta + c_{sm} \theta(t) - c_{sm} \theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_T d\theta + c_{sm} dt (\theta - \theta_1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d\theta}{dt} + \frac{c_{sm}}{C_T} (\theta - \theta_1) = 0}$$

à t , le gaz sortant est à la température $\theta(t)$.

En résolvant, on trouve: $\Theta(t) = Ae^{-t/\tau} + \Theta_1$ avec $\tau = \frac{C_T}{CD}$

or à $t=0$, $\Theta(0) = \Theta_0 \Rightarrow \Theta(t) = (\Theta_0 - \Theta_1)e^{-t/\tau} + \Theta_1$

et de plus à $t = \Delta t$: $\Theta(\Delta t) = (\Theta_0 - \Theta_1)e^{-\Delta t/\tau} + \Theta_1 = \Theta_f$

$$\Rightarrow e^{-\Delta t/\tau} = \frac{\Theta_f - \Theta_1}{\Theta_0 - \Theta_1}$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta t}{\tau} = \ln\left(\frac{\Theta_f - \Theta_1}{\Theta_0 - \Theta_1}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{C = \frac{C_T}{D\Delta t} \ln\left(\frac{\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_f - \Theta_1}\right)}$$

Rq: on aurait pu directement intégrer $C_T d\Theta = -CD dt (\Theta - \Theta_1)$

$$\Rightarrow \frac{d\Theta}{\Theta - \Theta_1} = -\frac{CD}{C_T} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\Theta_0}^{\Theta_f} \frac{d\Theta}{\Theta - \Theta_1} = -\int_0^{\Delta t} \frac{CD}{C_T} dt \quad \text{ce qui mène directement au résultat.}$$

$$\underline{\text{AN:}} \quad C = \frac{24,1 \cdot 10^3}{2,6 \cdot 10^{-4} \times 14 \times 60} \ln\left(\frac{200 - 14}{200 - 16}\right) = \underline{1200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Exercice 11

1. Choisissons le système: { toute l'eau chauffée pendant Δt }

Le transfert thermique effectivement reçu par le système s'écrit avec le 1^{er} ppe:

$$\Delta U = V_0 c (T_f - T_0) = Q_{\text{reçu}} \quad (\text{on néglige tout autre travail})$$

$\uparrow$ capacité thermique volumique!

Or le gaz possède un pouvoir énergétique PE qui représente l'énergie libérée par unité de volume (cf unité de PE) par la combustion du gaz.

Donc l'énergie totale apportée par le gaz est $PE \times V_{\text{gaz}} = Q_{\text{gaz}}$

$$\text{Le rendement est alors: } \eta = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie dépensée (à payer)}} = \frac{Q_{\text{reçu}}}{Q_{\text{gaz}}} = \underline{\frac{V_0 c (T_f - T_0)}{V_{\text{gaz}} \cdot PE}}$$

$$\underline{\text{AN:}} \quad \eta = \frac{10 \times 4,19 \cdot 10^3 (33 - 14)}{27 \cdot 10^3 \times 10,4 \times 10^3 \times 3600} = 0,79 = \underline{79\%}$$

$$(1 \text{ Wh} = 3600 \text{ Ws} = 3600 \text{ J})$$

2. Comme la valeur des pertes thermiques dépend de T (qui varie lors de la transformation), il faut décomposer l'étude en étapes élémentaires :

système : { volume V_0 d'eau }

Le premier principe entre t et $t+dt$ donne : $dU = \delta Q_{\text{gaz}} + \delta Q_{\text{perte}}$

$$\text{où } \delta Q_{\text{perte}} = -P_{\text{perte}} dt \quad (P_{\text{perte}} > 0)$$

Donc le premier principe donne : $dU = \delta Q_{\text{gaz}} - P_{\text{perte}} dt$

$$\text{or } \delta Q_{\text{gaz}} = \delta V \times PE$$

où δV = volume de gaz consommé pendant dt
en supposant le débit constant, $\delta V = \frac{V_{\text{gaz}}}{\Delta t} dt$

$$\text{D'où } V_0 c dT = \frac{V_{\text{gaz}}}{\Delta t} dt \cdot PE - P_{\text{perte}} dt$$

$$= \left[\frac{V_{\text{gaz}}}{\Delta t} PE - \alpha(T - T_0) \right] dt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha}{V_0 c} (T - T_0) = \frac{V_{\text{gaz}} PE}{V_0 c \Delta t}$$

$$\text{On pose } \tau = \frac{V_0 c}{\alpha} \text{ et alors : } \frac{dT}{dt} + \frac{T - T_0}{\tau} = \frac{T_f - T_0}{\eta \Delta t}$$

$$3. \text{ La solution s'écrit : } T(t) = A e^{-t/\tau} + \underbrace{\frac{T_f - T_0}{\eta \Delta t} \tau}_{\text{sol. particulière constante}} + T_0$$

$$\text{or à } t=0, T=T_0 \Rightarrow T(t) = \frac{T_f - T_0}{\eta \Delta t} \tau (1 - e^{-t/\tau}) + T_0$$

$$\text{et à } t=\Delta t, T(\Delta t) = T_f = \frac{T_f - T_0}{\eta \Delta t} \tau (1 - e^{-\Delta t/\tau}) + T_0$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\eta \Delta t} (1 - e^{-\Delta t/\tau}) = 1 \Leftrightarrow \eta \frac{\Delta t}{\tau} = 1 - e^{-\Delta t/\tau}$$

On résout numériquement l'équation : $\eta x = 1 - e^{-x}$ avec $\eta = 0,79$

On trouve $x \approx 0,49154$ à la calculatrice.

$$\text{D'où } x = \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{\Delta t \alpha}{V_0 c} \Rightarrow \alpha = \frac{x V_0 c}{\Delta t} = \frac{0,49154 \times 10 \times 4,18 \cdot 10^3}{5 \times 60} \approx \underline{68 \text{ W.K}^{-1}}$$