

TD20 – Introduction à la mécanique quantique

EXERCICE 1 : Sources de photons (★)

Pour chacune des sources suivantes, calculer l'énergie de chaque photon émis ainsi que le nombre de photons émis par seconde. On exprimera l'énergie en électron-Volt ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$).

1. Un tube à rayons X émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_X = 0.50 \text{ nm}$ avec une puissance $P_X = 0.20 \text{ W}$.
2. Un émetteur de radio irradie avec une puissance $P_r = 1.2 \text{ kW}$ à la fréquence $\nu_r = 1.5 \times 10^5 \text{ Hz}$.
3. Une lampe au sodium émet une lumière jaune de longueur d'onde $\lambda_s = 590 \text{ nm}$ avec une puissance $P_s = 40 \text{ W}$.

EXERCICE 2 : Effet photoélectrique (★)

Une plaque en potassium K est éclairée avec une lampe à vapeurs de mercure Hg. À l'aide de plusieurs filtres optiques, on sélectionne les différentes longueurs d'onde λ émises par la lampe. On mesure l'énergie cinétique E_c des électrons arrachés à la plaque métallique. Les résultats expérimentaux sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

λ (nm)	254	297	334	365	405	436	546	577
E_c (eV)	2,6	1,89	1,43	1,11	0,77	0,55	aucun	aucun

1. L'énergie cinétique des électrons arrachés dépend-elle de la puissance de la lampe?
2. Exprimer l'énergie E_c des électrons en fonction de longueur d'onde λ utilisée, du travail de sortie du potassium et éventuellement de constantes physiques.
3. Que faut-il tracer pour obtenir une relation affine?
4. Dédire la valeur de la constante de Planck des résultats expérimentaux.
5. Expliquer pourquoi pour certaines fréquences, aucun électron n'est arraché.
6. Déterminer le travail de sortie du potassium.

EXERCICE 3 : Microscope électronique (★)

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique minimale des détails distinguables, est de l'ordre de la longueur d'onde λ de l'onde utilisée.

1. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope?
2. En utilisant des ondes lumineuses du spectre visible, quel est l'ordre de grandeur du pouvoir de résolution?
3. En microscopie électronique, les électrons utilisés peuvent parfois atteindre des énergie cinétiques de 100 keV . Calculer la valeur de la longueur d'onde de De Broglie associée. En déduire la taille caractéristique des détails distinguables en exploitant le comportement ondulatoire de l'électron.

EXERCICE 4 : Vitesse d'un électron (★)

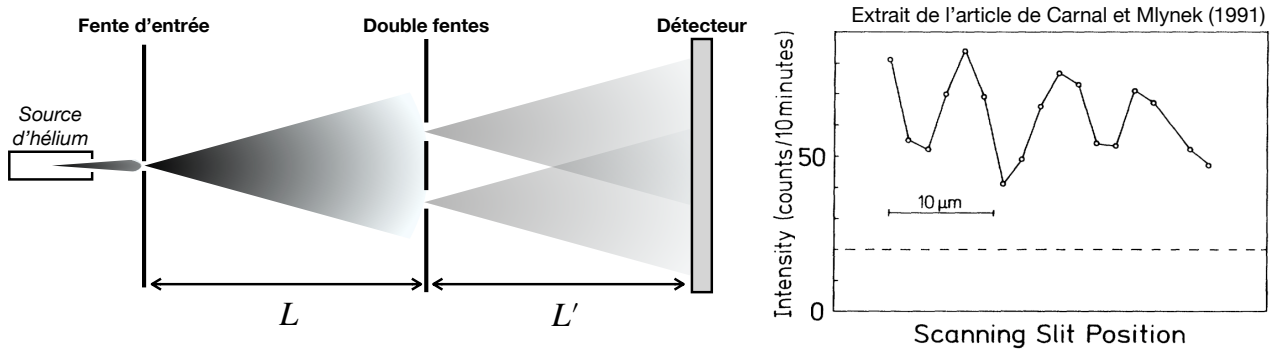
Un atome d'hydrogène est constitué d'un électron de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg confiné dans une zone de taille $a \sim 10^{-10}$ m autour d'un proton.

1. Estimer l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron à l'aide de l'inégalité de Heisenberg.
2. Exprimer la longueur d'onde de De Broglie de l'électron.

EXERCICE 5 : Expérience de Carnal et Mlynek (★)

Après des expériences réalisées avec des électrons ou des neutrons, la première expérience d'interférences avec des atomes a été réalisée sur le modèle des fentes d'Young en 1991 à l'Université de Constance.

Des atomes d'hélium (^4He) émis par une source thermique passent successivement par une fente d'entrée (largeur $s_1 = 2\mu\text{m}$) puis par une double fente (écartement $d = 8\mu\text{m}$, largeur $s_2 = 1\mu\text{m}$) avant d'être détectés. On schématise le dispositif expérimental ci-dessous. On suppose que les atomes d'hélium sont détectés sur un détecteur plan (en réalité, ils visualisent la figure d'interférence en déplaçant un détecteur ponctuel). On donne $L = L' = 64$ cm.



On rappelle la valeur de l'unité de masse atomique : $1 \text{ uma} \approx 1,67 \times 10^{-27}$ kg.

1. On donne la relation suivante :

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

où $\bar{v}$ est la vitesse quadratique moyenne d'une particule, $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ et T est la température. Donner un ordre de grandeur de la longueur d'onde de De Broglie λ_{dB} des atomes pour une température de la source de $T = 83 \text{ K}$.

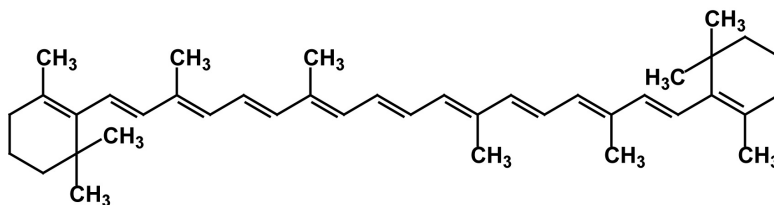
2. Sachant que le rôle de la fente d'entrée est de diffracter le faisceau issu de la source afin d'"éclairer" les doubles fentes, vérifier quantitativement qu'elle remplit bien ce rôle.
3. Quelle est l'interfrange mesurée pour $T = 83 \text{ K}$? En déduire la valeur de la longueur d'onde de De Broglie expérimentale $\lambda_{\text{dB}}^{\text{exp}}$. Conclure.

EXERCICE 6 : Électron confiné dans une molécule (★★)

Certaines molécules organiques ayant une longue chaîne carbonée linéaire (avec des doubles liaisons π délocalisées), comme le β -carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier mais qui peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule. On modélise un tel électron, de masse $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. L'énergie potentielle de l'électron est alors nulle sur ce segment et infiniment grande partout ailleurs : l'électron est confiné dans une boîte quantique.

1. Que peut-on en déduire (qualitativement) quant aux valeurs possibles pour les énergies de cet électron et en particulier concernant son énergie minimale (on détaillera le raisonnement) ?
2. Rappeler la définition de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$. En particulier, quelle relation existe-t-il entre $\Psi(x, t)$ et la *probabilité de présence* de l'électron en x à l'instant t ?
3. Que valent $\Psi(0)$ et $\Psi(L)$? Justifier.
4. En déduire les valeurs possibles de la longueur d'onde de l'électron confiné. À quel phénomène ce comportement est-il analogue ?
5. Donner enfin l'expression des niveaux d'énergie mécanique E_n en fonction de m , L , n et h . Justifier précisément.

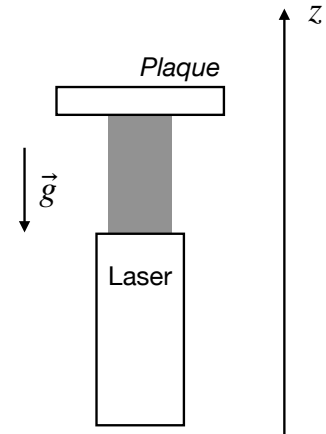
Dans le β -carotène (formule ci-dessous), ce sont les 22 électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur $L = 1,83$ nm. Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas (deux par niveaux).



6. Calculer les niveaux d'énergie E_{11} et E_{12} . On donne $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s.
7. En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde dans le vide d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12. On donne $c = 3.00 \times 10^8$ m/s.
8. Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles, etc).

EXERCICE 7 : Lévitration optique d'une plaque absorbante (★★)

On considère une plaque carrée de côté $L = 7 \text{ mm}$ et d'épaisseur $e = 10 \mu\text{m}$ composée d'un matériau parfaitement absorbant de masse volumique $\rho = 1500 \text{ kg.m}^{-3}$. Cette plaque est éclairée par le dessous par un laser monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 532 \text{ nm}$ d'intensité I uniforme dont le faisceau laser est cylindrique de diamètre $a = 5 \text{ mm}$. On note g l'accélération de la pesanteur.



On rappelle que les photons transportent une énergie $E = h\nu$ et une quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{e}_z$, avec ν la fréquence de l'onde. La plaque absorbe parfaitement l'onde incidente et donc les photons associés. Il en résulte un transfert de quantité de mouvement s'interprétant comme une force appliquée du faisceau laser sur la plaque.

En considérant un élément de surface élémentaire dS du faisceau laser, la force résultante de l'absorption des photons par la plaque s'écrit $d\vec{F} = p_{\text{rad}}dS\vec{e}_z$ où p_{rad} est nommée **pression de radiation**.

1. Exprimer le nombre de photons δN absorbés par une surface élémentaire dS de la plaque durant un intervalle de temps infinitésimal dt .
2. En déduire l'expression de la quantité de mouvement $\delta\vec{P}$ absorbée par cet élément de surface dS durant dt .
3. Exprimer la force $d\vec{F}$ subie par un élément dS de la plaque et en déduire l'expression de la pression de radiation p_{rad} .
4. Déterminer l'expression de la force de pression de radiation totale subie par la plaque sous l'action du faisceau laser.
5. Déterminer la valeur de l'intensité I du faisceau laser permettant d'atteindre un équilibre de lévitation de la plaque.