# DM9 Correction

1. Comparons $J_H = \frac{1}{5} m (a^2+b^2)$ et $J_V = \frac{2}{5} m a^2$

$$\frac{J_H}{J_V} = \frac{\frac{1}{5} m (a^2+b^2)}{\frac{2}{5} m (a^2)} = \frac{a^2+b^2}{2a^2}$$ or $a<b$, donc $a^2+b^2 > a^2+a^2$

on trouve $\frac{J_H}{J_V} > 1$ donc $J_H > J_V$

Le moment d'inertie est plus important lorsque l'oeuf tourne à l'horizontale.

2. Par définition $E_m = E_c + E_p$

$E_c$ : énergie cinétique ; $E_p$ : énergie potentielle.

À l'horizontal : $E_c = \frac{1}{2} J_H \Omega^2$

$E_p = mga$ (énergie potentielle de pesanteur)

en choisissant $E_p(0)$ si le centre de gravité est au niveau de la table.

car G le centre de gravité est à une altitude a de la table.

Donc $E_{m,H} = \frac{1}{2} J_H \Omega^2 + mga$

À la verticale : par un raisonnement similaire, on obtient :

$$E_{m,V} = \frac{1}{2} J_V \Omega^2 + mgb$$

3. Cherchons une condition sur $\Omega$ pour que $E_{m,H} > E_{m,V}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J_V \Omega^2 + mgb < \frac{1}{2} J_H \Omega^2 + mga$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (J_H - J_V) \Omega^2 > mg(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} m (a^2+b^2) - \frac{2}{5} m a^2 \right) \Omega^2 > mg(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} m (b^2-a^2) \Omega^2 > 2mg(b-a)$$

Ainsi $E_{m,H} > E_{m,V} \Leftrightarrow \Omega^2 > 10g\,\frac{b-a}{b^2-a^2} = 10g \cdot \frac{1}{a+b}$

$$\Leftrightarrow \quad \Omega > \sqrt{\frac{10g}{a+b}} = \Omega_c$$

4. AN : $\Omega_c = \sqrt{\frac{10 \times 10}{(2{,}0+3{,}0) \cdot 10^{-2}}} \simeq 45\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\sim 7$ tours/s)

La valeur est cohérente avec celle donnée dans le document.

5. D'après la question 2 : à l'instant initial (à l'horizontale) :

$$E_{m,H} = \frac{1}{2} J_H \Omega_0^2 + mga = \frac{1}{2} J_H (\Omega_c + \varepsilon)^2 + mga$$

$$= \frac{1}{2} J_H \Omega_c^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\Omega_c}\right)^2 + mga$$

$$\simeq \frac{1}{2} J_H \Omega_c^2 \left(1 + 2\frac{\varepsilon}{\Omega_c}\right) + mga \quad \text{à l'ordre 1 en } \frac{\varepsilon}{\Omega_c}$$

Donc $E_{m,H} \simeq \frac{1}{2} J_H (\Omega_c^2 + 2\varepsilon\Omega_c) + mga$

À l'instant final (à la verticale) :

$$E_{m,V} = \frac{1}{2} J_V \Omega_f^2 + mgb = \frac{1}{2} J_V (\Omega_c + r\varepsilon)^2 + mgb$$

$$= \frac{1}{2} J_V \Omega_c^2 \left(1 + \frac{r\varepsilon}{\Omega_c}\right)^2 + mgb$$

$$\simeq \frac{1}{2} J_V \Omega_c^2 \left(1 + \frac{2r\varepsilon}{\Omega_c}\right) + mgb \quad \text{à l'ordre 1 en } \frac{r\varepsilon}{\Omega_c}$$

D'où $E_{m,V} \simeq \frac{1}{2} J_V (\Omega_c^2 + 2r\varepsilon\Omega_c) + mgb$

6. En considérant que l'énergie mécanique est conservée lors du redressement :

$$E_{m,H} = E_{m,V} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} J_H (\Omega_c^2 + 2\varepsilon\Omega_c) + mga = \frac{1}{2} J_V (\Omega_c^2 + 2r\varepsilon\Omega_c) + mgb$$

Or, par définition de $\Omega_c$ à la question 3

$$\frac{1}{2} J_V \Omega_c^2 + mgb = \frac{1}{2} J_H \Omega_c^2 + mga$$

(on réinjecte sinon l'expression de $\Omega_c$ dans l'égalité)

Donc :

$$\frac{1}{2} J_H \cdot 2\varepsilon\Omega_c = \frac{1}{2} J_V \cdot 2r\varepsilon\Omega_c$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r = \frac{J_H}{J_V} = \frac{a^2+b^2}{2a^2} > 1} \quad \text{(cf question 1)}$$

L'oeuf a une <u>vitesse de rotation plus importante</u> après le redressement.

Si $a \approx b$, alors $\underline{r \simeq 1}$

il n'y a alors plus de différence entre la position horizontale et la position verticale car l'oeuf peut être considéré comme sphérique. La variation de la vitesse de rotation est donc nulle lors d'un "redressement".

7. Par définition, $L_H = J_H \Omega_0$ (avant redressement)

$L_V = J_V \Omega_f$ (après redressement)

Donc

$$\Delta L = L_V - L_H = J_V \Omega_f - J_H \Omega_0$$

$$= J_V \left( \Omega_f - \frac{J_H}{J_V} \Omega_0 \right)$$

$$= J_V \left( \Omega_c + r\varepsilon - r(\Omega_c + \varepsilon) \right)$$

$r = \frac{J_H}{J_V}$

$$= J_V \left( \Omega_c - r\Omega_c \right)$$

$$= \Omega_c \left( J_V - J_H \right)$$

$$= \Omega_c \left( \frac{2}{5} ma^2 - \frac{1}{5} ma^2 - \frac{1}{5} mb^2 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta L = \frac{\Omega_c m(a^2-b^2)}{5} < 0} \quad \text{car } a < b$$

Le moment cinétique de l'oeuf <u>a diminué</u> lors du redressement.

8. Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $(Oz)$ appliqué à l'oeuf dans le référentiel de la cuisine galiléen donne :

$$\frac{dL}{dt} = C_z$$

intégré entre l'instant initial (avant) et final (après redressement) :

$$\underline{\Delta L = C_z \Delta t}$$

Donc $C_z = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = \dfrac{\Omega_c\, m(a^2-b^2)}{5\Delta t}$

$$= \frac{\Omega_c^2}{\Omega_c} \cdot \frac{m(a^2-b^2)}{5\Delta t} \qquad \text{or } \Omega_c^2 = \frac{10g}{a+b}$$

$$= \frac{1}{\Omega_c \Delta t} \cdot \overbrace{\frac{10g}{a+b}}^{\Omega_c^2} \cdot \frac{m(a^2-b^2)}{5}$$

$$= \frac{1}{\Omega_c \Delta t} \cdot \frac{10mg(a+b)(a-b)}{5(a+b)}$$

Finalement : $\underline{C_z = \dfrac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}}$

9. Le poids et la réaction normale de la table ne peuvent pas être responsables d'un tel couple car ces forces sont parallèles à l'axe de rotation (moment nul par rapport à $(Oz)$).

Le couple peut en revanche provenir des <u>frottements au niveau de la table</u> (on nous dit par ailleurs que la surface ne doit pas être "trop lisse" dans le document).
Cependant, cela contredit l'hypothèse de conservation de l'énergie mécanique.