Devoir maison nº10

À rendre le **22 avril 2025**

Ce sujet traite de la résolution numériques de problèmes physiques. Il est composé de 6 page(s). L'intégralité du sujet est à traiter. L'entraide entre élèves est autorisée, la rédaction de la copie reste personnelle.

Les questions (⋆) sont à traiter sur le notebook ou code python dédié, et ne demandent aucune réponse écrite sur la copie.

Rappel :

- ▷ Comme pour tous les devoirs (DS, DM et lors des concours), les réponses doivent être **soulignées ou encadrées** dans une couleur autre que celle de rédaction (rouge par exemple).
- ▷ La numérotation des questions répondues doit clairement apparaître sur la copie.
- ▷ Un saut de ligne doit être clairement observé entre deux questions distinctes.

⋆ ⋆ ⋆

EXERCICE 1 : Charge d'un condensateur

Code associé (sur Capytale) : d016-5172079

On étudie la charge d'un condensateur d'un circuit RC par une source de tension continue $E = 5\,\mathrm{V}$, tel que le temps caractéristique de charge s'exprime $\tau = RC = 10\,\mathrm{ms}$. Le condensateur est initialement déchargé. L'équation différentielle vérifiée par u_c s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau} \tag{1}$$

1. Écrire l'équation différentielle sous la forme : $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = f(u_c, t)$, on précisera l'expression de f. Rappeler l'expression de $u_c(t_{i+1})$ en fonction de $u_c(t_i)$ selon la méthode d'Euler, en faisant intervenir h le pas de résolution.

2. (⋆) Définir une liste des instants entre t_0 et t_f (ligne 15). Cette liste contiendra n valeurs.

3. (⋆) Définir le pas de calcul h (ligne 18).

4. (⋆) Compléter la relation de récurrence, permettant de calculer la valeur de `liste_y[i+1]` connaissant `liste_y[i]`. Il ne faut pas oublier que la fonction f prend également comme argument l'instant t_i.

5. (⋆) Définir la fonction `f_charge(uc,t)` permettant de calculer $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ connaissant la valeur de u_c (soit la fonction f introduite à la questions 1).

On souhaite étudier la décharge entre un instant initial $t_0 = 0$ et un instant final $t_f = 70\,\mathrm{ms}$, avec un nombre de pas de calcul $n = 1000$.

6. ($\star$) Compléter les lignes 38 à 43 pour que les listes `liste_t` et `liste_uc` soient calculées à l'aide de la fonction `euler(f,y0,t0,tf,n)`. Tracer ensuite la courbe en croix reliées, couleur noire.

7. ($\star$) On rappelle que la solution analytique s'exprime : $u_c(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$. Représenter la courbe associée à la solution analytique (en courbe rouge) sur le même graphe (à vous d'adapter le code).

8. Commenter le résultat. Vous pouvez également changer la valeur de n pour étudier l'influence de ce paramètre.

Nous souhaitons transformer l'équation différentielle étudiée en une équation **adimensionnée**, c'est-à-dire ne faisant intervenir que des grandeurs sans dimensions ou des constantes numériques. C'est une pratique usuelle dans divers domaines de la physique, notamment en physique numérique. Pour cela, pour chaque variable du problème, il faut introduire un équivalent adimensionné, obtenu en divisant la variable par une grandeur caractéristique du problème de même dimension.

> *Exemple* :
> pour adimensionner la tension u_c, il faut identifier un paramètre caractéristique du problème, homogène à une tension. On choisira ici la tension E. Ainsi on introduit :
> $$\tilde{u}_c = \frac{u_c}{E}$$
> La variable $\tilde{u}_c$ est bien sans dimension.
> De la même manière, le temps caractéristique du problème est τ. Ainsi :
> $$t \longrightarrow \tilde{t} = \frac{t}{\tau} \quad \text{(variable adimensionnée)}$$

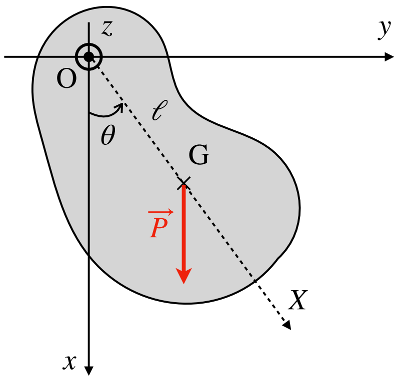
9. Exprimer la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}_c}{\mathrm{d}\tilde{t}}$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, E et τ.

10. En déduire une écriture adimensionnée de l'équation différentielle (1), faisant donc intervenir uniquement les grandeurs adimensionnées $\tilde{u}_c$ et $\tilde{t}$ et des constantes numériques.

EXERCICE 2 : Étude d'un pendule pesant

Code associé (sur Capytale) : 8159-6098345

On considère un pendule pesant de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$, de moment d'inertie $J = 7 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg.m^2}$ par rapport à l'axe (Oz) et dont le centre de gravité est distant de O de $\ell = 15\,\mathrm{cm}$, lâché depuis une position initiale θ_0 avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. Le mouvement du pendule se fait sans frottements (on considère la liaison pivot comme parfaite). On prendra $g = 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.



1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ s'exprime :
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$
où ω_0 est à exprimer en fonction de J, ℓ, m et g.

On propose de résoudre l'équation du mouvement d'un pendule pesant à l'aide de la fonction `odeint`.

2. À partir de l'équation différentielle, montrer que l'évolution du système satisfait l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X,t) \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$$

   On explicitera la fonction $F(X,t)$.

3. ($\star$) **[cellule 2]** Grâce à la question précédente, définir la fonction `F(X,t)` qui prend en argument une liste `X` et un flottant `t` et renvoie une liste correspondant à la dérivée de X à l'instant t.

Considérons que le pendule est lâché initialement d'un angle $\theta_0 = 10°$. On souhaite étudier le mouvement du pendule sur 10 s à partir de $t_0 = 0$. Pour le calcul, on choisira un nombre de pas supérieur à 1000.

4. ($\star$) **[cellule 2]** Définir les paramètres `t0`, `tf` et `N` en adéquation au calcul à réaliser, et créer une liste `liste_t` contenant les instants où seront calculées les solutions.

5. ($\star$) **[cellule 2]** Définir `theta0` et `thetap0` permettant de définir `X0` la liste contenant les conditions initiales. **Attention, on prendra soin de directement convertir les angles en radians.**

6. ($\star$) **[cellule 2]** À l'aide de la fonction `odeint`, calculer la liste `X_sol` contenant les solutions de l'équation différentielle.

7. ($\star$) **[cellule 3]** Représenter à l'aide de `plt.plot`[1] la solution $\theta(t)$ calculée par la fonction `odeint`. Commenter (sur la copie) le résultat.

8. Dans le cas d'une approximation des petits angles, montrer que la solution du problème s'exprime :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

9. ($\star$) Comparer la solution calculée utilisant `odeint` avec le solution littérale obtenue dans l'approximation des petits angles. Pour cela, copier et coller le contenu de la **[cellule 3]** dans la **[cellule 4]**, puis modifier la **[cellule 4]** pour superposer, sur une même figure, la courbe précédemment calculée et la courbe correspondant à la solution théorique pour des petites angles.

10. Commenter le résultat. L'approximation est-elle satisfaisante ?

On souhaite comparer l'évolution de $\theta(t)$ pour différentes valeurs de θ_0 pour étudier l'influence des conditions initiales.

11. ($\star$) En vous inspirant du contenu des **[cellule 2]** et **[cellule 3]**, proposer un code dans **[cellule 5]** permettant de tracer, sur la même figure, la solution $\theta(t)$ avec les conditions initiales $\theta_0 = 10°, 60°, 90°$.

12. Commenter le résultat. A-t-on isochronisme des oscillations ?

13. (Bonus) Proposer une écriture adimensionnée de l'équation différentielle. On remarquera que θ est déjà une variable adimensionnée.

1. L'argument `label` dans la fonction `plt.plot` permet de donner un nom à la courbe, sous la forme d'une chaîne de caractères, qui s'affiche alors sur le graphe lorsque la fonction `plt.legend()` est appeleé.

Cas d'une vitesse initiale non nulle (partie facultative)

14. ($\star$) On considère que $\theta_0 = 0$. Compléter le code de la **[cellule 6]** pour calculer (avec un pas $N = 1000$) et représenter l'évolution de $\theta(t)$ entre $t_0 = 0$ et $t_f = 15\,\text{s}$ pour les vitesses angulaires initiales suivantes :

$$\dot{\theta}_0 = 7\,\text{rad.s}^{-1} \quad ; \quad 9\,\text{rad.s}^{-1} \quad ; \quad 9,17\,\text{rad.s}^{-1} \quad ; \quad 9,18\,\text{rad.s}^{-1}.$$

   On distinguera les différentes courbes à l'aide de l'argument d'une légende (cf. question 7).

15. Commenter et expliquer physiquement le résultat. Montrer qu'il existe une valeur critique $\dot{\theta}_{0,c} = \sqrt{\frac{4mg\ell}{J}}$ qui permet de distinguer deux régimes de mouvement. On pourra pour cela utiliser une approche énergétique (grâce à l'intégrale première du mouvement).

16. ($\star$) **[cellule 7]** Dans le cas où $\dot{\theta}_0 = 7\,\text{rad.s}^{-1}$ ($\dot{\theta}_0 < \dot{\theta}_{0,c}$), déterminer avec `odeint` le mouvement du pendule, puis calculer à partir de la solution les énergies cinétique et potentielle [2]. On rappelle que, compte tenu du schéma de résolution choisi, le résultat de `odeint` contient la liste des $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$. Représenter leur évolution au cours du temps.

17. ($\star$) Faire de même pour $\dot{\theta}_0 = 10\,\text{rad.s}^{-1}$ ($\dot{\theta}_0 > \dot{\theta}_{0,c}$) dans la **[cellule 8]**.

18. Décrire les évolutions des énergies cinétique et potentielle obtenues pour les deux vitesses de rotation initiales. En particulier, l'énergie cinétique s'annule-t-elle ?

19. ($\star$) Dans la **[cellule 9]**, écrire un code permettant de calculer et tracer la courbe représentant l'évolution de $\theta(t)$ pour $\theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_{0,c}$. On tracera l'évolution entre $t_0 = 0$ et $t_f = 50\,\text{s}$.

20. ($\star$) Faire varier la valeur du nombre de pas N de quelques unités et observer l'effet sur la solution calculée.

21. Décrire et commenter l'observation faite. En particulier, comparer au mouvement initialement attendu avec ces conditions initiales.

Prise en compte de frottements (partie facultative)

On suppose que des frottements fluides s'appliques sur le pendule pesant lors de son mouvement, dont le couple de frottement par rapport à l'axe (Oz) s'exprime : $\mathcal{M}_{(Oz)}^{(\text{frott})} = -\lambda\dot{\theta}$.
On considère que $\theta_0 = 10°$ et $\dot{\theta}_0 = 0$.

22. Montrer que l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{\theta} + k\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\sin(\theta) = 0$$

   où k est à exprimer en fonction des grandeurs du problème. On choisira pour la suite $k = 0,1$.

23. ($\star$) Copier le contenu de la **[cellule 2]** et le coller dans la **[cellule 10]**. Modifier alors la **[cellule 10]** afin d'adapter le code de résolution à la nouvelle équation différentielle considérée (on conservera les mêmes t_0, t_f et N).

24. ($\star$) Copier et coller la **[cellule 3]** dans la **[cellule 11]** et représenter alors l'évolution de $\theta(t)$ au cours du temps.

2. Pour plus de clarté, on choisira comme origine des énergies potentielles la position où le pendule est à la verticale ($\theta = 0$). Ainsi, on a $E_p = mgl(1 - \cos(\theta))$.

25. Commenter le résultat. Comment évolue l'amplitude des oscillations ?[3]

26. (⋆) Faire varier la valeur de k entre 0,01 et 3, et observer l'effet de ce paramètre sur le mouvement du pendule.

27. Décrire et commenter l'observation faite à la question précédente.

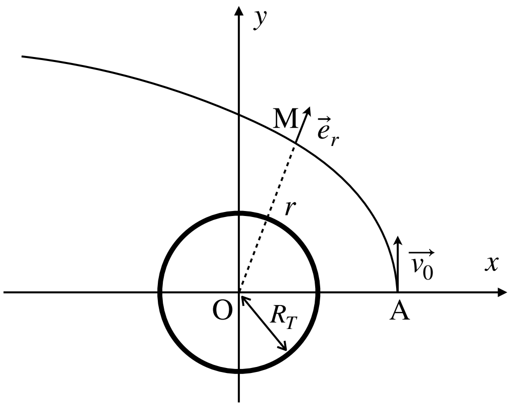
28. (⋆) Dans la [**cellule 12**], calculer l'évolution de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur à partir des $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ calculés. Représenter leur évolution au cours du temps. On pourra également représenter l'évolution de l'énergie mécanique.

29. Décrire l'évolution des courbes obtenues à la question précédente.

EXERCICE 3 : Mouvement d'un satellite autour de la Terre

Code associé (sur Capytale) : fa61-6205292

On étudie le mouvement d'un satellite M de masse m initialement au point A de coordonnées $x_A = 8400\,\text{km}$ (soit à une altitude de 2000 km de la surface de la Terre) et $y_A = 0$. On lui communique alors une vitesse initiale v_0 dirigée selon $\vec{e}_y$. On souhaite étudier les différentes trajectoires possibles du satellite en fonction de la vitesse v_0.



On rappelle les valeurs suivantes : masse de la Terre $M_T = 5{,}97 \times 19^{24}\,\text{kg}$; rayon de la Terre $R_T = 6370\,\text{km}$; constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$.

1. Déterminer l'expression de $v_{0,c}$ la vitesse pour laquelle la trajectoire du satellite est en orbite circulaire. Faire l'application numérique.

2. Déterminer l'expression de $v_{0,\text{lib}}$ la vitesse pour laquelle laquelle le satellite échappe à l'attraction terrestre. On pourra s'inspirer du calcul réalisé pour la seconde vitesse cosmique et adopter une approché énergétique.

3. Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de G, M_T, r et $\vec{e}_r$, où $r = \text{OM}$ et $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire radial de la base polaire.

4. On décide de résoudre l'équation différentielle dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On rappelle que :

$$r = \left\|\overrightarrow{\text{OM}}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{\text{OM}}}{\left\|\overrightarrow{\text{OM}}\right\|} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{r}$$

Montrer que la projection du vecteur accélération dans la base cartésienne mène aux équations du mouvement suivantes :

$$\ddot{x} = -\frac{GM_T x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$
$$\ddot{y} = -\frac{GM_T y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

3. On pourra s'amuser à tracer l'enveloppe de la solution, obtenue en résolvant l'équation différentielle en se limitant aux petits angles.

5. Montrer que ce système d'équations se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X,t) \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

   où F est une fonction à expliciter.

6. ($\star$) Compléter le code définissant la fonction `F(X,t)` qui permet de calculer la dérivée de X à un instant t.

7. ($\star$) On suppose qu'initialement. $v_0 = v_{0,c}$. Définir `X0` la liste comportant les conditions initiales. Cette liste aura 4 éléments, correspondant aux éléments de X à t_0.

8. ($\star$) À l'aide de la fonction `odeint`, tracer la trajectoire (soit la courbe $y = f(x)$) du satellite pour $v_0 = v_{0,c}$ et vérifier que le résultat de la question 1 est correct. On choisira un instant initial $t_0 = 0$ et un instant final t_f suffisamment grand pour obtenir une période de révolution. Le nombre de pas N est à fixer arbitrairement. La Terre est représentée par un cercle rouge.

9. ($\star$) Faire de même pour $v_0 = v_{0,\text{lib}}$. Tester également des vitesses $v_0 \in]v_{0,c}\ , v_{0,\text{lib}}[$.

10. Décrire les observations faites aux questions précédentes.

On étudie maintenant le mouvement pour des vitesses v_0 inférieures à $v_{0,c}$.

11. ($\star$) Tracer la trajectoire dans le cas où la vitesse initiale v_0 vaut : $0,98v_{0,c}$; $0,9v_{0,c}$; $0,6v_{0,c}$.

12. Décrire les trajectoires obtenues à la question précédente.

13. Montrer qu'il existe une vitesse $v_{0,\text{min}}$ en-dessous de laquelle le satellite s'écrase sur la Terre, à exprimer en fonction de $v_{0,c}$, R_T et h.
    Si vous n'arrivez pas à établir l'expression littérale de $v_{0,\text{min}}$, essayez de trouver une estimation de sa valeur numérique par tâtonnement avec le code python.

14. ($\star$) Vérifier avec le code python le résultat de la question précédente.

15. Représenter schématiquement la trajectoire dans le cas où $v_0 = v_{0,\text{min}}$ et donner la valeur numérique de $v_{0,\text{min}}$.

16. (Bonus) Que se passerait-il si la force n'était pas newtonienne? Modifier la fonction `F(X,t)` dans le cas où la force d'interaction évoluerait en $\frac{1}{r^{3/2}}$ (au lieu de $\frac{1}{r^2}$). On tracera la trajectoire dans le cas où $v_0 = 50v_{0,\text{lib}}$ (on pourra jouer sur t_f pour jouer sur la clarté de l'affichage). On obtient alors une trajectoire non fermée.