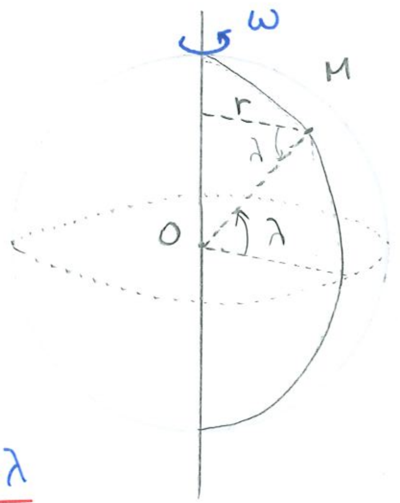
DM8 Correction

Exercice 1

1. Juste avant le décollage, le satellite est fixe dans le référentiel terrestre, il suit donc le mouvement de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique.



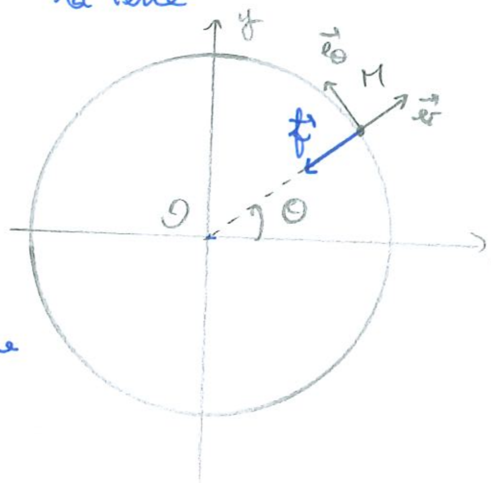
À une latitude λ, le satellite est distant de $r = R_T \cos\lambda$ de l'axe de rotation de la Terre.

La vitesse du satellite est donc : $v_0 = r\omega = R_T\omega\cos\lambda$

Ainsi, l'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique (R) du satellite est :

$$E_{c,0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mR_T^2\omega^2\cos^2\lambda$$

2. Lorsque le satellite est en orbite, il n'est soumis qu'à l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre, de la forme : $\vec{f} = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{e_r}$, où $\vec{e_r}$ vecteur radial, où l'origine O du repère est confondu avec le centre de la Terre



On applique le PFD au satellite dans (R) galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

or dans la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$:

$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$; $\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$, où r = constante = $R_T + h$ car le mouvement est circulaire

Donc le PFD donne (après projection) : $\begin{cases} mr\ddot{\theta} = 0 \\ -mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{M_T m}{r^2} \end{cases}$

alors $r^2\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{r}$ et $v = r|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$

AN : $v = 7{,}6\ km.s^{-1}$

L'énergie cinétique est alors : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G M_T m}{2(R_T + h)}$

Autre méthode : Pour un satellite, l'énergie mécanique dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r s'écrit : $E_m = -\frac{G M_T m}{2r}$

or $E_c + E_p = E_m$ où $E_p = -\frac{G M_T m}{r}$ (énergie potentielle sur la trajectoire circulaire de rayon r)

D'où $\frac{1}{2} m v^2 = -\frac{G M_T m}{2r} + \frac{G M_T m}{r} = \frac{G M_T m}{2r}$

et $v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}$ (Beaucoup plus rapide)

3. Pour déterminer l'énergie $\mathcal{E}$ à fournir au satellite initialement, il faut comparer les énergies mécaniques :

$$\mathcal{E} = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$$

or $\Delta E_c = \frac{G M_T m}{2(R_T + h)} - \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda$

$$\Delta E_p = -\frac{G M_T m}{R_T + h} - \left(-\frac{G M_T m}{R_T}\right) = G M_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = \frac{G M_T m h}{R_T (R_T + h)}$$

Donc $\mathcal{E} = \frac{G M_T m}{2(R_T + h)} - \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda + \frac{G M_T m h}{R_T (R_T + h)}$

$$\mathcal{E} = \frac{G M_T m (R_T + 2h)}{2 R_T (R_T + h)} - \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda$$

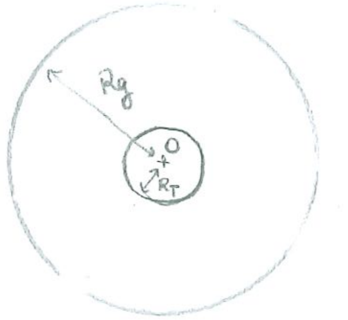
AN : $\mathcal{E} = \frac{6{,}67.10^{-11} \times 6{,}0.10^{24} \times 5{,}8.10^3 (6400.10^3 + 2 \times 6{,}0.10^5)}{2 \cdot 6400.10^3 (6400.10^3 + 6{,}0.10^5)} - \frac{1}{2} \cdot 5{,}8.10^3 (6400.10^3)^2 \cdot \frac{2\pi}{24.3600} \cdot \cos(5{,}2)^2$

$$\mathcal{E} \simeq 2{,}0.10^{11}\ \mathrm{J}$$

En choisissant $\lambda \to 0$, on peut minimiser l'énergie à fournir au satellite (avec une base de lancement proche de l'équateur).

4. Par définition un satellite en orbite géostationnaire se situe à tout moment à la verticale d'un même point à la surface de la Terre. Comme le satellite à la même vitesse de rotation autour de l'axe de rotation que la Terre, son mouvement doit se faire dans un plan orthogonal à l'axe de rotation. De plus, comme la force qui s'applique sur le satellite est centrale, son mouvement est contenu dans un plan contenant le centre O de la Terre.

Le seul plan orthogonal à l'axe de rotation de la Terre et passant par O est le plan équatorial.



Pour déterminer le rayon Rg de l'orbite géostationnaire, on utilise la relation :

$$\frac{T^2}{R_g^3} = \frac{4\pi^2 m}{K} \quad \text{avec } K = G M_T m$$

D'où $R_g = \left(\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ où T = période de révolution de la Terre

AN: $R_g = \left(\frac{6{,}67.10^{-11} .\ 6{,}0.10^{24} .\ (24.3600)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq 4{,}23.10^7 \text{ m}$

5. Comme P correspond au périgée et A à l'apogée de l'ellipse de transfert,

on a $2a = AP$

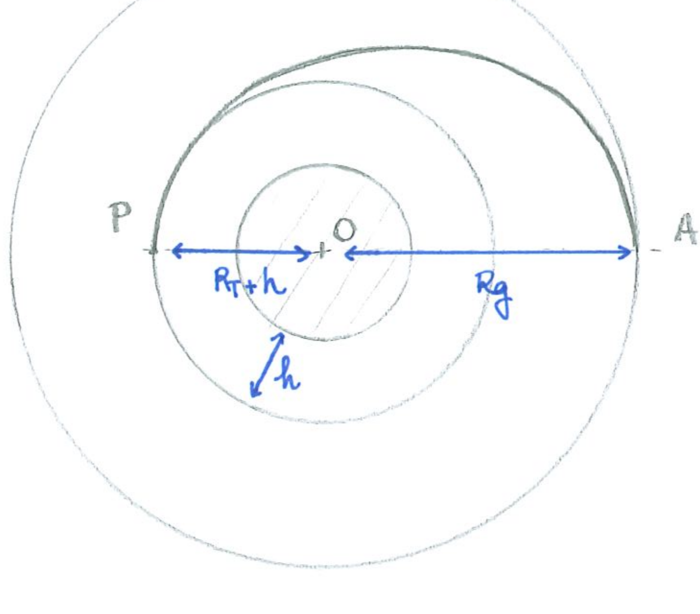
où a = demi-grand axe de l'ellipse

Or A appartient à l'orbite géostationnaire

donc $OA = R_g$

et P appartient à l'orbite basse donc

$OP = R_T + h$



Ainsi $2a = OA + OP = R_g + R_T + h$

$$\Rightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{2}(R_g + R_T + h)} \qquad \underline{AN}: a \simeq 2{,}46 \cdot 10^7\,m$$

Ainsi sur l'orbite elliptique, le satellite a une énergie mécanique :

$$E_m^{transfert} = -\frac{K}{2a} \quad \text{où} \quad K = G M_T m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{E_m^{transfert} = -\frac{G M_T m}{R_T + R_g + h}}$$

6. Déterminons v_P vitesse du satellite en P sur l'orbite de transfert.

Comme $E_m^{transfert} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{K}{R_T + h} = -\frac{K}{R_T + R_g + h}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_P^2 = \frac{G M_T m}{R_T + h} - \frac{G M_T m}{R_T + R_g + h} = \frac{G M_T m R_g}{(R_T + h)(R_T + h + R_g)}$$

$$\Rightarrow \quad v_P = \sqrt{\frac{2 G M_T R_g}{(R_T + h)(R_T + h + R_g)}}$$

En P, avant la modification de la vitesse par le moteur, le satellite a une vitesse v (calculée à la question 2) sur l'orbite basse.

Le moteur doit donc communiquer une vitesse :

$$\Delta v = v_P - v = \sqrt{\frac{2 G M_T R_g}{(R_T + h)(R_T + h + R_g)}} - \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$$

$$\underline{\Delta v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 R_g}{R_T + h + R_g}} - 1 \right)}$$

$\underline{AN}$: $\underline{\Delta v = 2{,}3\,km.s^{-1}}$

7. Tant que le satellite est sur l'ellipse de transfert, son énergie mécanique est constante $E_m^{transfert}$.

Si v_A est la vitesse v_A en A, alors :

$$E_m^{transfert} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GM_T m}{R_g} \quad \text{car } OP = R_g$$

$$= -\frac{GM_T m}{R_T + R_g + h}$$

$$\Rightarrow \quad v_A^2 = \frac{2GM_T}{R_g} - \frac{2GM_T}{R_T + R_g + h}$$

$$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2GM_T(R_T+h)}{(R_g+R_T+h)R_g}} \qquad \text{AN: } v_A \simeq 1{,}6 \text{ km.s}^{-1}$$

En A, le moteur fournit de l'énergie au satellite pour qu'il passe sur l'orbite géostationnaire. Or sur l'orbite géostationnaire, l'énergie du satellite est :

$$E_m^{geo} = -\frac{GM_T m}{2R_g}$$

donc en A : $E_m^{geo} = \frac{1}{2} m v_g^2 - \frac{GM_T m}{R_g} = -\frac{GM_T m}{2R_g}$

où v_g vitesse du satellite sur l'orbite géostationnaire (constante le long de l'orbite).

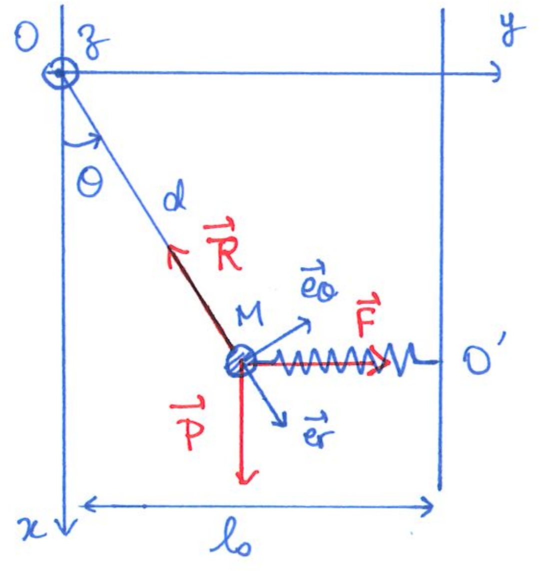
$$\text{D'où} \quad v_g = \sqrt{\frac{GM_T}{R_g}} \qquad \text{AN: } v_g \simeq 3{,}1 \text{ km.s}^{-1}$$

8. En utilisant la 3e loi de Képler, mais adaptée au cas d'un satellite terrestre :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$ or la durée $T_{transfert}$ correspond à $T/2$

$$\text{D'où } T_{transfert} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{GM_T}} \qquad \text{AN: } T_{transfert} \simeq 1{,}9.10^4 \text{ s} = 5{,}3 \text{ h}$$

Exercice 2



1. On cherche les forces qui s'appliquent au système {M de masse m} :

→ poids $\vec{P}$:

dans la base polaire :

$$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

→ force de rappel du ressort $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -k(l-l_0)(-\vec{e_y})$$

or l = longueur du ressort $= l_0 - d\sin\theta$

d'où $\vec{F} = -kd\sin\theta\,\vec{e_y}$

dans la base polaire : $\vec{e_y} = \cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r} \Rightarrow \underline{\vec{F} = -kd\sin^2\theta\,\vec{e_r} - kd\sin\theta\cos\theta\,\vec{e_\theta}}$

→ réaction de la tige $\vec{R}$: $\underline{\vec{R} = -R\vec{e_r}}$

2. On applique le théorème du moment cinétique en O, dans le réf. du labo galiléen :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}_0}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) \quad (*)$$

or $\vec{\mathcal{L}_0} = m\vec{OM}\wedge\vec{v}$ et comme $\begin{cases}\vec{OM} = d\vec{e_r} \\ \vec{v} = d\dot{\theta}\vec{e_\theta}\end{cases}$, on a $\vec{\mathcal{L}_0} = md^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

et $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \vec{OM}\wedge\vec{P} = d\vec{e_r}\wedge\vec{P} = -mgd\sin\theta\,\vec{e_z}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \vec{OM}\wedge\vec{F} = -kd^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e_z}$

D'où (*) donne : $md^2\ddot{\theta}\,\vec{e_z} = \vec{0} - mgd\sin\theta\,\vec{e_z} - kd^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e_z}$

Projeté selon $\vec{e_z}$: $md^2\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta - kd^2\sin\theta\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{d}\sin\theta + \frac{k}{m}\cos\theta\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0} \qquad \text{où} \quad \underline{\omega_1^2 = \frac{k}{m}}$$

$$\underline{\omega_2^2 = \frac{g}{d}}$$

3. Reprenons l'équation du mouvement et multiplions par $md^2\dot{\theta}$:

$$md^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + md^2\dot{\theta}\sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0 \quad (**)$$

or ⊛ $\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dot{\theta}\cdot\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)$

⊛ $\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$

⊛ $\dot{\theta}\sin\theta = \frac{d}{dt}\left(-\cos\theta\right)$

on peut également écrire :

$$\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \dot{\theta}\frac{\sin(2\theta)}{2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)$$

et $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2(\theta)\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right)$

on retrouve la même expression à une constante près.

Donc $(**)$ est équivalent à : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2\right) + md^2\omega_1^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) + md^2\omega_2^2\frac{d}{dt}\left(-\cos\theta\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + md^2\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - md^2\omega_2^2\cos\theta\right) = 0$$

Ainsi, en intégrant par rapport au temps : $\underline{\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + md^2\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - md^2\omega_2^2\cos\theta = \text{cste}}$

On obtient une intégrale première du mouvement qui s'interprète comme la conservation de l'énergie mécanique : on reconnaît : $\rightarrow \frac{1}{2}m(d\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mv^2 =$ énergie cinétique

$\rightarrow md^2\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}k(d\sin\theta)^2 =$ énergie potentielle élastique (du ressort)

$\rightarrow -md^2\omega_2^2\cos\theta = -mgd\cos\theta =$ énergie potentielle de pesanteur.

Ainsi l'énergie potentielle totale du système est :

$$E_p(\theta) = m d^2 \frac{\omega_1^2}{2} \sin^2\theta - m d^2 \omega_2^2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow E_p(\theta) = m d^2 \left(\frac{\omega_1^2}{2} \sin^2\theta - \omega_2^2 \cos\theta \right)$$