TD18 – Forces centrales

EXERCICE 1 : Étude d'une force centrale (⋆)

Une particule de masse m subit une force $\overrightarrow{f} = -k\frac{m}{r^5}\vec{u}$ où k est une constante et $\vec{u}$ un vecteur constamment dirigé d'un point fixe O vers M, position de la masse m. Initialement la masse m est en A séparé de O d'une distance R et sa vitesse est perpendiculaire à OA.

1. Établir que si la trajectoire est circulaire, le mouvement est uniforme.
2. Montrer que la trajectoire ne peut être circulaire que pour $k > 0$.
3. Donner la valeur qu'il faut donner à la vitesse initiale pour que la trajectoire soit circulaire en fonction du rayon R de la trajectoire et de la constante k.

EXERCICE 2 : Caractéristique d'une planète (⋆)

Au cours d'une mission dans l'espace, une sonde passe à proximité d'une planète de rayon a. On observe alors que la planète possède un satellite qui décrit une orbite circulaire de rayon R autour de la planète avec une période T.

Peut-on à l'aide de ces informations calculer la masse M_P de la planète ? la masse m_S du satellite ? le terme gravitationnel g du champ de pesanteur créé par la planète à sa surface ?

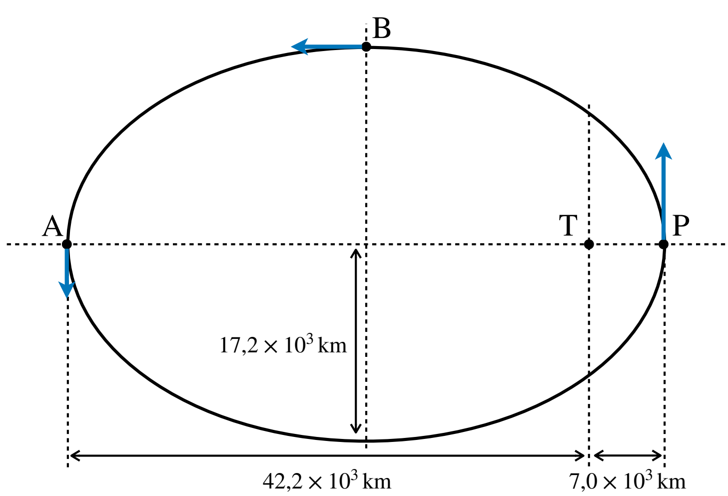
EXERCICE 3 : Énergie de mise en orbite rasante (⋆)

Un satellite (masse m), lancé initialement d'un point B du sol terrestre de latitude λ, décrit une orbite rasante de rayon $r \simeq R$ (plus précisément, $r = R + z$, avec $z \ll R$).

1. On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles ($\Omega = 2\pi/T_0$ avec $T_0 = 24\,\text{h}$). Quelle est la vitesse du satellite sur sa base de lancement dans le référentiel géocentrique ? En déduire l'énergie mécanique initiale E_B.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite sur sa trajectoire circulaire.
3. Quel est l'intérêt d'une base de lancement située au voisinage de l'équateur ?

EXERCICE 4 : Étude d'une orbite elliptique (⋆)

Un satellite S de masse $m = 1{,}00\,\text{t}$, décrit une orbite elliptique autour de la Terre. La satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle, constamment dirigée vers le point T, fixe dans le référentiel d'étude. Cette orbite, dont l'apogée correspond à un point d'une orbite géostationnaire, peut être utilisée comme trajectoire temporaire pour transférer un satellite sur cette orbite, à partir d'une position plus basse.



1. En B, la vitesse du satellite est de $14,5 \times 10^3\,\text{km.h}^{-1}$. Calculer la norme du moment cinétique du satellite par rapport à T lorsque le satellite est en B.
2. Montrer que le moment cinétique par rapport à T est conservé au cours du mouvement.
3. Déterminer alors la norme de la vitesse du satellite aux points A et P.
4. Démontrer la loi des aires.
5. L'aire d'une ellipse est donnée par la formule $A = \pi a b$ où a et b sont respectivement son demi grand axe et son demi petit axe. Démontrer la période de ce satellite.

EXERCICE 5 : Freinage d'un satellite (★★)

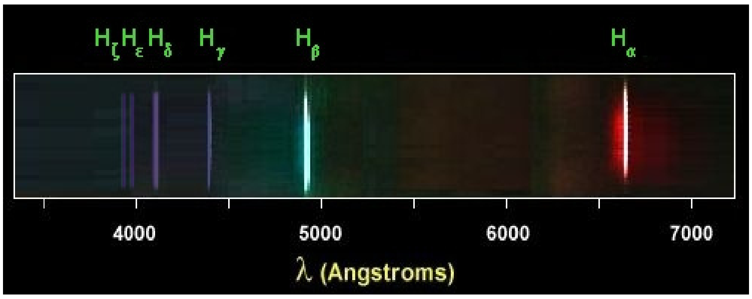
Le référentiel géocentrique est supposé galiléen et la Terre sphérique, de masse M_T et de rayon $R_T \simeq 6400\,\text{km}$. Un satellite artificiel de masse m décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r = R_T + z$ où z est l'altitude du satellite. La norme du champ de pesanteur à la surface de la Terre est $g_0 \simeq 10,\text{m.s}^{-2}$.

1. (★) Déterminer en fonction de m, R_T, z et g_0 la norme v de la vitesse du satellite, son énergie mécanique E_m, la norme L_O de son moment cinétique calculé au centre O de la Terre, et sa période de révolution T.
2. (★) Calculer l'altitude z_0 d'un satellite géostationnaire, c'est-à-dire restant constamment à la verticale d'un même point de la Terre.

Le satellite est soumis dans les couches supérieures de l'atmosphère à une force de frottement $\overrightarrow{F} = -km\frac{v}{z}\overrightarrow{v}$. Le module de cette force est très inférieur à celui de la force d'attraction terrestre, si bien qu'au bout d'une révolution qu'on considérera quasiment circulaire, l'altitude du satellite subit une petite variation $|\Delta z| \ll z$.

3. Justifier qualitativement l'expression de la force de frottement.
4. Montrer que le mouvement du satellite est plan.
5. Exprimer la variation de vitesse Δv au bout d'un tour, en fonction de Δz et T.
6. Calculer le travail des forces de frottement pour une révolution.
7. En déduire la variation Δz de l'altitude du satellite en fonction de k, R_T et z.
8. Commenter le signe de Δz et celui de Δv.

EXERCICE 6 : Modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène (⋆⋆)



Les premières raies spectrales de l'hydrogène qui furent étudiées sont situées dans le domaine visible du spectre, bien qu'elles aillent en se resserrant vers une limite située dans le proche ultraviolet. Cette série de raies s'appelle la série de Balmer. À la fin du XIXe siècle, Balmer parvint à établir une formule empirique qui fournissait la longueur d'onde λ des raies du spectre de l'atome d'hydrogène connues à l'époque : $\frac{1}{\lambda_n} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ où R_H est une constante nommée constante de Rydberg et possède la valeur de : $R_H \approx 109\,700\,\text{cm}^{-1}$ et n un entier supérieur à 2.
Plus tard, d'autres raies furent découvertes et la formule empirique de Balmer fut généralisée par la formule de Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda_{m,n}} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

L'objectif de cet exercice est de construire un modèle semi-quantique pour rendre compte de ces phénomènes. Celui qui est développé ici a été conçu par Niels Bohr en 1913. On considère que l'atome d'hydrogène est constitué d'un électron de charge $-e$ et de masse m_e en interaction électrostatique avec le noyau constitué d'un proton de charge $+e$. On choisit la position du proton comme l'origine du repère d'étude.

1. Montrer que le mouvement de l'électron est plan et donner l'expression de la norme du moment cinétique en O.
2. Sur une trajectoire de rayon r, exprimer la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ de l'électron en fonction de e, m_e r et ε_0.

Afin de rendre compte des observations expérimentales de l'époque, Niels Bohr postule que le moment cinétique de l'électron est quantifié, tel que $L_O = n\hbar$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite, avec $h = 6,63 \times 10^{-34}\,$J.s.

3. Montrer que le rayon des orbites "autorisées" est quantifié et exprimer r_n en fonction de n.

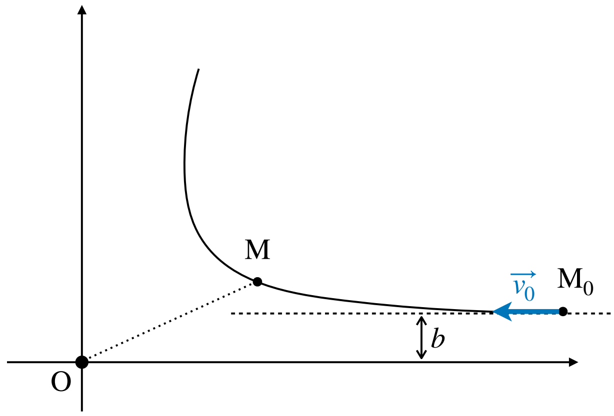
Niels Bohr fait également comme autre postulat que l'électron peut gagner (ou perdre) de l'énergie uniquement en transitant entre deux orbitales stables définies par deux entiers m et n, s'accompagnant de l'absorption (ou l'émission) d'une radiation de fréquence ν vérifiant la relation de Planck $\Delta E = h\nu$, où ΔE est la variation d'énergie de l'électron lors de la transition.

4. Pour une orbite d'indice n, exprimer l'énergie mécanique de l'électron E_n associée.
5. On considère un électron qui émet de la lumière en passant d'une orbite d'indice m à une orbite d'indice n. Exprimer la longueur d'onde $\lambda_{n,m}$ de la lumière associée à cette transition et retrouver la formule de Rydberg. Donner l'expression de R_H en fonction de ε_0, m_e, e, h et c la vitesse la lumière.
6. Calculer la valeur de la constante de Rydberg R_H.
7. Déterminer la valeur numérique de l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

Données : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\,$kg ; $e = 1,6 \times 10^{-19}\,$C ; $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\,$F.m^{-1} ; $c = 3,0 \times 10^{8}\,$m.s^{-2}.

EXERCICE 7 : Expérience de Rutherford (★★)

Les expériences de E. Rutherford et de ses deux étudiants H. Geiger et E. Mardsen au début du XXe siècle ont permis de montrer l'existence du noyau atomique. En plaçant une très fine feuille d'or sur le trajet d'un faisceau de particules α (noyaux d'hélium ${}_2^4\mathrm{He}$, de charge $+2e$), ils ont observé que, même si la majorité des particules α n'est pas déviée, une petite partie est fortement déviée, voire semble "rebondir" sur la feuille d'or (déflexion de plus de 90°).
Afin d'interprétation ces résultats, Rutherford explique que la charge positive dans l'atome n'est pas diluée dans tout l'atome mais est concentrée sur une très faible dimension au centre de l'atome : le noyau atomique.



Le faisceau de particules α possède une vitesse $v_0 = 2\times10^7\,\mathrm{m.s^{-1}}$. On modélise une particule α par un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel supposé galiléen du noyau d'or (de charge $+Ze$) fixe en O. La particule a été émise en M_0 loin de la feuille d'or à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$.

On note b le paramètre d'impact, défini comme la distance séparant la droite portant $\overrightarrow{v_0}$ de la droite passant par O parallèle à $\overrightarrow{v_0}$. Lorsque la particule α est en M_0, elle est suffisamment éloignée du noyau d'or pour pouvoir négliger la force d'interaction. On néglige de plus la présence des électrons dans la feuille d'or.

Données :
- ▷ charge élémentaire $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
- ▷ numéro atomique de l'or : $Z = 79$.
- ▷ permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}}$
- ▷ masse d'un nucléon : $m_n \approx 1{,}7\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

1. Reproduire le schéma ci-dessus en y introduisant la base de vecteurs polaire utilisée pour l'étude.
2. Rappeler l'expression de la force d'interaction électrostatique entre les deux charges. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée.
3. Calculer l'énergie mécanique de la particules α en M_0 et en déduire le type de trajectoire suivie par la particule.
4. Calculer le moment cinétique en O de la particule α lorsqu'elle se trouve en M_0 en fonction du paramètre d'impact et des données utiles. Le moment cinétique est-il conservé au cours du mouvement (justifier) ?
5. Lorsque $b \to 0$, que devient le moment cinétique ? Représenter la trajectoire de la particule α lorsque $b = 0$.
6. Dans le cas où $b = 0$, déterminer la distance minimale d'approche du noyau d'or, notée $r_{\min}$. Faire l'application numérique.
7. (★★★) Si $b \neq 0$, montrer que la distance minimale d'approche s'exprime :

$$r_{\min,2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 v_0^2 m} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 v_0^2 m}\right)^2}$$

   On pourra remarquer que $E_p^{\mathrm{eff}}(r = r_{\min,2}) = E_0$. Représenter $r_{\min,2}$ sur le schéma précédent.
8. Que devient ce résultat si b est "petit" ? et s'il est "grand" ?
   À quelle distance faut-il comparer b afin de donner un sens aux qualificatifs "petit" ou "grand ?