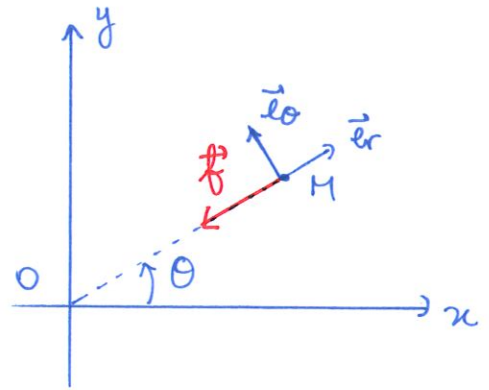


TD18 Correction

Exercice 1

1. On suppose que la particule ne subit que la force $\vec{f}$ centrale. Le mouvement est donc plan. On utilisera les coordonnées polaires pour étudier le mouvement de la particule.



alors $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ si la trajectoire est circulaire alors $r = R = \text{cte}$

$$\text{d'où } \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Le PFD appliqué au système dans le référentiel d'étude galiléen donne:

$$m\vec{a} = \vec{f} = -k\frac{m}{R^5}\vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \text{selon } \vec{e}_r: -mR\dot{\theta}^2 = -k\frac{m}{R^5} \\ \text{selon } \vec{e}_\theta: mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Or $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$ Donc le mouvement est uniforme.

Rq: on aurait pu utiliser le TRC également, qui permet d'obtenir la conservation du moment cinétique en O.

2. Le PFD selon $\vec{e}_r$ donne: $\dot{\theta}^2 = \frac{k}{R^6} > 0$ si et seulement si $k > 0$

3. Si le mouvement est circulaire alors $\dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{k}{R^6}}$, notamment il faut $\omega(t=0) = \sqrt{\frac{k}{R^6}}$, Or $\omega(t=0) = \frac{v_0}{R}$

Il faut donc $v_0 = \frac{\sqrt{k}}{R^2}$

Exercice 2

Le satellite observé est soumis à une interaction centrale newtonienne.

En appliquant un PFD, on trouverait $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2 m_s}{K}$ où m_s masse du satellite

et ici $K = G N_p m_s$, d'où $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G N_p}$

- * Il est possible d'en déduire N_p .
- * Cependant, impossible de déterminer m_s avec ces informations.
- * le champ de pesanteur à la surface de la planète s'écrit :

$$\vec{g} = - \frac{G N_p}{a^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow g = \frac{G N_p}{a^3} \text{ or } N_p \text{ est calculable à connu}$$

Il est possible de calculer g .

Rp: la force gravitationnelle qui s'applique sur une masse à la surface de la planète serait :

$$\vec{F} = -G \frac{N_p m}{a^2} \vec{e}_r = m \vec{g}$$

$$\text{ou } \vec{g} = -G \frac{N_p}{a^2} \vec{e}_r$$

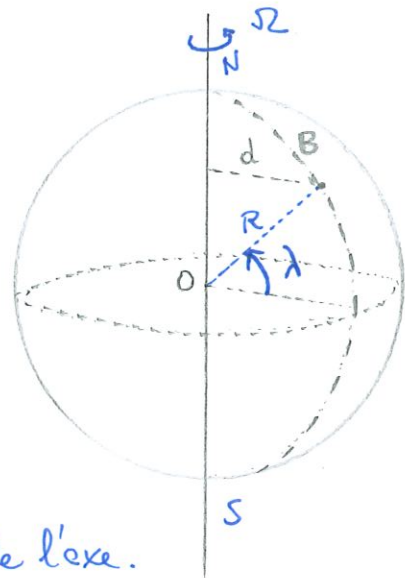
Exercice 3

1. Le satellite est au repos dans le référentiel de la base au point B.

Dans le référentiel géocentrique, il est en mouvement de rotation autour de l'axe de rotation de la Terre.

Or il est éloigné d'une distance $d = R \cos \lambda$ de l'axe.

Donc sa vitesse est $v_B = d \times \Omega = R \Omega \cos \lambda$



Rp: il a un mouvement circulaire dans le plan parallèle au plan de l'équateur passant par B. En introduisant une base cylindrique, on trouve $\vec{v} = d \cdot \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Or en B, l'énergie potentiel du satellite est $E_p(B) = -\frac{GM_T m}{R}$

D'où $E_B = E_c(B) + E_p(B)$

$$= \frac{1}{2} m (R \omega \cos \lambda)^2 - \frac{GM_T m}{R}$$

↑
car le satellite est à la surface de la Terre.

2. On sait que pour une trajectoire circulaire de rayon r dans le cas d'une interaction newtonienne, $E_m = -\frac{K}{2r}$

où ici $r = R$ et $K = GM_T m$

D'où $E_m = -\frac{GM_T m}{2R}$

Ré: On peut redémontrer ce résultat en exprimant la vitesse du satellite lorsqu'il est sur son orbite circulaire. Par cela il faut appliquer un PFD en base polaire.

On trouve alors $v = r\omega = \sqrt{\frac{K}{mr}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ Cela permet de calculer E_c et donc E_m .

3. L'énergie à fournir au satellite est minimale au niveau de l'équateur car E_B est alors maximal ($\lambda = 0$).

Exercice 4

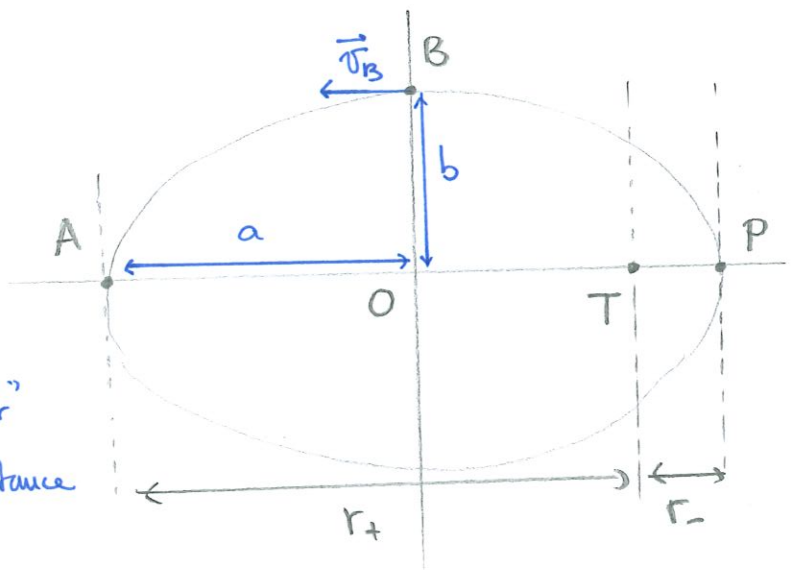
1. On cherche à calculer

$\|\vec{\mathcal{L}}_T^{(B)}\|$. Or $\vec{v}_B$ est colinéaire

à la droite (OT). Le "bras de levier"

entre $\vec{v}_B$ et T est donc b la distance du demi-petit axe.

donc $\|\vec{\mathcal{L}}_T^{(B)}\| = b \times m \times \|\vec{v}_B\|$



Ré: sinon on écrit $\vec{\mathcal{L}}_T^{(B)} = \vec{TB} \wedge \vec{v}_B \times m = m(\vec{TO} + \vec{OB}) \wedge \vec{v}_B$
 $= m(\underbrace{\vec{TO} \wedge \vec{v}_B}_{=0}) + m(\vec{OB} \wedge \vec{v}_B) = m \vec{OB} \wedge \vec{v}_B$

AN: $\|\vec{L}_T^{(B)}\| = 1,00 \cdot 10^3 \times 17,2 \cdot 10^6 \times 14,5 \cdot 10^3 \times \frac{1000}{3600} \approx \underline{6,93 \cdot 10^{13} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}}$

2. Le satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle dirigée vers T.

Donc $\vec{M}_T(\vec{F}_{\text{grav}}) = \vec{0}$

En applique le th. du moment cinétique en T au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen, on trouve: $\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \vec{M}_T(\vec{F}_{\text{grav}}) = \vec{0}$

d'où $\vec{L}_T = \text{cte}$ Le moment cinétique en T est conservé.

3. Comme $\vec{L}_T = \text{cte}$, on a $\|\vec{L}_T\| = \text{cte} = \|\vec{L}_T^{(B)}\|$

* en A: $\|\vec{L}_T^{(A)}\| = r_+ \times m \times \|\vec{v}_A\|$

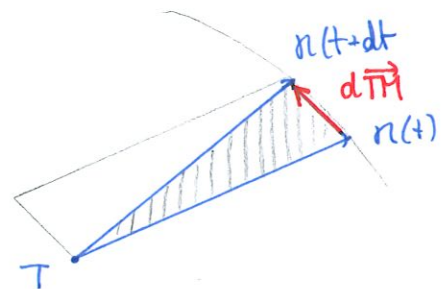
d'où $\|\vec{v}_A\| = \frac{\|\vec{L}_T^{(B)}\|}{r_+ m} = \frac{b \|\vec{v}_B\|}{r_+}$

AN: $\|\vec{v}_A\| \approx 5,91 \cdot 10^3 \text{ km/h} = 1,64 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

* en P: $\|\vec{L}_T^{(P)}\| = r_- \cdot m \|\vec{v}_P\|$ d'où $\|\vec{v}_P\| = \frac{b \|\vec{v}_B\|}{r_-}$

AN: $\|\vec{v}_P\| \approx 35,6 \cdot 10^3 \text{ km/h} = 9,90 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

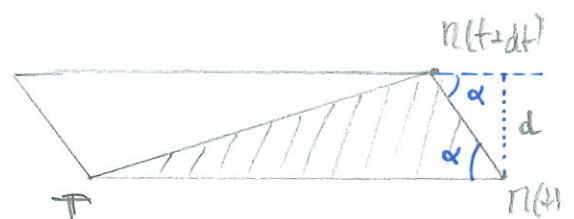
4. Intéressons nous à l'aire balayée par le vecteur $\vec{r}_T$ entre t et t+dt (surface hachurée). Il s'agit de la moitié de l'aire d'un parallélogramme dont $\vec{r}_T$ et $d\vec{r}_T$ sont des côtés, où $d\vec{r}_T = \vec{v} \cdot dt$



L'aire du parallélogramme est:

$$A_{\text{parall.}} = TM \times d = TM \times \|d\vec{r}_T\| \sin \alpha$$

$$= TM \cdot \|\vec{v}\| \cdot dt \sin \alpha$$



Donc dA l'aire balayée est :
$$dA = \frac{1}{2} (\|\vec{r}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \alpha) dt$$

$$= \frac{1}{2} (\|\vec{r} \wedge \vec{v}\|) dt$$

d'où
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|\vec{L}_T\|}{2m} = \text{cte}$$

On retrouve la loi des aires. L'aire balayée par le vecteur $\vec{r}$ est proportionnelle au temps de balayage et est indépendante de la phase du mouvement considérée.

5. Comme $\frac{dA}{dt} = \frac{\|\vec{L}_T\|}{2m}$, on a notamment :

durant la période T , l'aire balayée est $A = ab \cdot \pi$

donc
$$\frac{A}{T} = \frac{\|\vec{L}_T\|}{2m} \Rightarrow T = \frac{2mA}{\|\vec{L}_T\|}$$

or $\|\vec{L}_T\| = \text{cte} = \|\vec{L}_T^{(S)}\| = b m \|\vec{v}_B\|$

d'où
$$T = \frac{2mab\pi}{b m \|\vec{v}_B\|} = \frac{2a\pi}{\|\vec{v}_B\|} = \frac{\pi(r_+ + r_-)}{\|\vec{v}_B\|}$$
AN: $T \approx 3,84 \cdot 10^4 \text{ s}$
(10h40min)

Exercice 5

1. Réf: géocentrique galiléen
Système: satellite de masse m

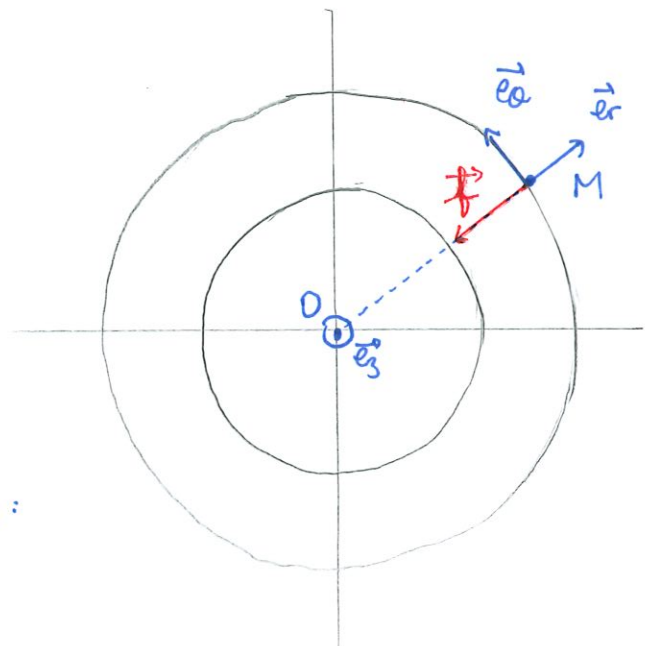
Bilan des forces: $\vec{f} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$
 où $K = G M m$

Expression de l'accélération dans la base polaire :

$\vec{r} = r \vec{e}_r$ où r rayon de la trajectoire

$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$\vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$



Le principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite :

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

en projection selon $\vec{e}_r$: $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{r^2}$ (*)

selon $\vec{e}_\theta$: $mr\ddot{\theta} = 0$

* Déterminer v :

(*) donne $r\dot{\theta}^2 = \frac{K}{mr}$ or $v^2 = r^2\dot{\theta}^2$ d'où : $v = \sqrt{\frac{K}{mr}}$

or $K = GM_T m$ et $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$, donc $K = g_0 R_T^2 m$

et $v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g}}$

* Déterminer l'énergie mécanique E_m :

Comme : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$ et $v^2 = \frac{K}{mr}$ et $E_p(r) = -\frac{K}{r}$

Donc $E_m = \frac{K}{2r} - \frac{K}{r} = -\frac{K}{2r}$ d'où $E_m = -\frac{g_0 R_T^2 m}{2(R_T + g)}$

* Déterminer la norme du moment cinétique L_0 :

Comme $\vec{OM} \perp \vec{v}$ en tout point du mouvement, on a

$$L_0 = \|\vec{L}\| = \|\vec{OM} \wedge m\vec{v}\| = m \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

D'où $L_0 = mrv = m \sqrt{g_0 R_T^2 (R_T + g)} = \underline{m R_T \sqrt{(R_T + g) g_0}}$

* Déterminer la période T

(*) donne $\dot{\theta}^2 = \frac{K}{mr^3}$ or $\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{T}$

donc $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{K}{mr^3} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 mr^3}{K}} = \underline{2\pi \sqrt{\frac{(R_T + g)^3}{g_0 R_T^2}}}$

2. À partir de l'expression de T :

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{(R_T + z)^3}{g_0 R_T^2} \Rightarrow z = \left(\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T$$

on trouve alors z_0 l'altitude d'un satellite géostationnaire si on choisit $T = 24h$.

AN: $z_0 = \left(\frac{10 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2 (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - 6400 \cdot 10^3 \approx \underline{36 \cdot 10^3 \text{ km}}$

3. On utilise une force de frottement de la forme $\vec{F} = -km \frac{v}{z} \vec{v}$

→ $\|\vec{F}\|$ est proportionnel à v^2 ce qui correspond à des frottements fluides de type turbulent (lorsque la vitesse est élevée)

→ $\vec{F}$ s'oppose au mouvement, et est bien orienté selon $-\vec{v}$

→ $\|\vec{F}\|$ diminue en $1/z$ afin de prendre en compte que la force est moins importante à haute altitude à cause de la raréfaction de l'air.

4. Plusieurs justifications possibles:

* pas symétrie: la force de frottement étant dans le plan de la trajectoire n'a aucune de faire sortir le système de ce plan d'un côté ou de l'autre.

* avec PFD: si l'on projette la force dans la base cylindrique, comme $\vec{v}$ est selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, $\vec{F}$ n'a aucune composante selon $\vec{e}_z$.
ainsi le PFD selon $\vec{e}_z$ donne toujours $m\ddot{z} = 0$, donc si initialement il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e}_z$, alors cela reste le cas tout au long du mouvement.

⚠ z ici n'est pas à confondre avec l'altitude du satellite!

* avec TNC: $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{O}\vec{n} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge \left(-km \frac{v}{z} (r\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \right)$
 $= -km \frac{v}{z} r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

moins efficace ici!

donc $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$ or $\vec{L}_O$ est selon $\vec{e}_z$, donc $\vec{M}_O(\vec{F})$ tend à modifier $\|\vec{L}_O\|$ mais pas à modifier sa direction.

Donc comme la direction de $\vec{L}$ ne varie pas, et que $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à cette direction fixe (selon $\vec{e}_z$), le mouvement reste plan.

5. Utilisons l'expression de v .

$$\text{En } g: v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g}}$$

$$\text{où } r = g + R_T$$

$$\text{En } g + \Delta g: v' = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g + \Delta g}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta g}{r}}} \approx \underbrace{\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g}}}_{\substack{\parallel v \\ \text{DL à l'ordre 1}}} \left(1 - \frac{\Delta g}{2r}\right)$$

$$\text{car } |\Delta g| \ll g, \text{ donc } |\Delta g| \ll r$$

$$\text{Donc } \Delta v = v' - v = -v \cdot \frac{\Delta g}{2(R_T + g)}$$

$$\text{or } v = \frac{2\pi r}{T} \quad (T \text{ durée pour parcourir un tour de la trajectoire})$$

$$\text{D'où } \underline{\Delta v = -\frac{\pi}{T} \Delta g}$$

Autre méthode : on différentie $v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g}}$

$$dv = \frac{dv}{dg} dg \quad \text{où} \quad \frac{dv}{dg} = \sqrt{g_0 R_T^2} \times \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(R_T + g)^{3/2}}\right) = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + g}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_T + g}\right) = -v \cdot \frac{1}{2(R_T + g)}$$

$$\text{ainsi, on assimile } dv \rightarrow \Delta v \\ dg \rightarrow \Delta g$$

$$\Delta v = -\frac{v}{2} \cdot \frac{\Delta g}{(R_T + g)} = -\frac{\pi}{T} \Delta g$$

6. Le travail élémentaire est $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

En supposant la trajectoire circulaire : $\vec{F} = -km \frac{v^2}{g} \vec{e}_\theta$
car $\vec{v} = v \vec{e}_\theta$ et $d\vec{l} = r d\theta \vec{e}_\theta$

$$\text{D'où } \underline{\delta W = -km \frac{v^2}{g} r d\theta}$$

$$\text{et sur un tour: } W = \int_{1 \text{ tour}} \delta W = \int_0^{2\pi} -km \frac{v^2}{g} r d\theta = -km \frac{v^2}{g} r \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi km \frac{v^2}{g} r$$

$$\text{Ainsi } W = - \frac{2\pi k m v^2 (R_T + z)}{z} = - \frac{2\pi k m g_0 R_T^2}{z} < 0$$

La force de frottement a un travail résistant.

7. Connaissant le travail des forces non conservatives, on peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique sur 1 tour : $\Delta E_m = W$

$$\text{or } E_m^i = - \frac{g_0 R_T^2 m}{2(R_T + z)} \text{ à l'instant initial}$$

$$\text{et } E_m^f = - \frac{g_0 R_T^2 m}{2(R_T + z + \Delta z)} \text{ à l'instant final}$$

$$= - \frac{g_0 R_T^2 m}{2(R_T + z) \left(1 + \frac{\Delta z}{R_T + z}\right)}$$

$$\approx - \frac{g_0 R_T^2 m}{2(R_T + z)} \left(1 - \frac{\Delta z}{R_T + z}\right)$$

$$\text{Ainsi } \Delta E_m = E_m^f - E_m^i = \frac{\Delta z \times g_0 R_T^2 m}{2(R_T + z)^2} = - \frac{2\pi k m g_0 R_T^2}{z}$$

$$\text{D'où } \underline{\Delta z = - \frac{4\pi k (R_T + z)^2}{z}}$$

8. On obtient $\Delta z < 0$

$$\text{et } \underline{\Delta v = - \frac{\pi}{T} \Delta z = \frac{4\pi^2 k (R_T + z)^2}{z T} > 0}$$

Les forces de frottement ont pour effet d'augmenter la vitesse !

En réalité, le système perd de l'énergie : comme $E_m = - \frac{K}{2r}$, en perdant de l'énergie, la trajectoire voit son rayon diminuer.

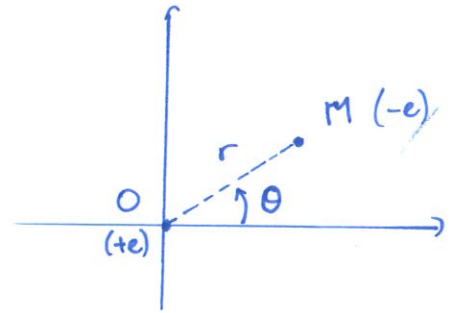
Or $v = \sqrt{\frac{K}{mr}}$: plus la trajectoire a un faible rayon, plus la vitesse augmente.

Exercice 6

1. Système : électron

Réf : lié au proton, supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{f} = \frac{-e \times e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$



* Moment cinétique en O : $\vec{L}_O(n) = m_e \vec{OM} \wedge \vec{v}$

* Théorème du moment cinétique en O : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{f}) = \vec{0}$
car la droite d'action de $\vec{f}$ passe par O.

Donc $\vec{L}_O$ est une constante du mouvement.

Or à tout instant, $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{L}_O$, donc cela limite le mouvement de l'électron à un plan.

On introduit une base plane dans le plan du mouvement, et alors :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{D'où } \vec{L}_O(n) = m_e r\vec{e}_r \wedge \vec{v} = \underline{m_e r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z} \quad \text{donc } \underline{L_O = \|\vec{L}_O\| = m_e r^2 \dot{\theta}}$$

2. Appliquons le PFD à l'électron : $m_e \vec{a} = \vec{f}$

or en base plane et pour une trajectoire circulaire de rayon r :

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$\text{D'où } \begin{cases} m_e r \dot{\theta} = 0 \\ -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}$$

$$\text{Or } \vec{p} = m_e \vec{v} = m_e r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

↑
mouvement circulaire de rayon r

$$\text{D'où } \vec{p} = m_e r \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{p} = \sqrt{\frac{e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 r}} \vec{e}_\theta}$$

3. Bohr postule que $L_0 = n\hbar = m_e r^2 \dot{\theta}$

$$\text{or } \dot{\theta} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}} \quad \text{d'où : } m_e r^2 \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}} = n\hbar$$

$$\text{soit } \frac{e^2 m_e^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} = n^2 \hbar^2 \Rightarrow r_n = n^2 \cdot \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{e^2 m_e} = n^2 r_1$$

Le rayon des orbites est quantifié et évolue selon n^2 .

4. Pour un électron, $E_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 + E_p(r_n) = \frac{p_n^2}{2m_e} + E_p(r_n)$

$$\text{or } E_p(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où p_n quantité de mouvement sur l'orbite n .

$$\Rightarrow E_n = \frac{1}{2m_e} \cdot \frac{e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

$$= - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

en remplaçant par l'expression de r_n , on obtient:

$$E_n = - \frac{e^4 m_e}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} = - \frac{e^4 m_e}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

5. On considère la transition de l'orbite m vers l'orbite n , l'électron subit une variation d'énergie :

$$\Delta E_{n,m} = E_n - E_m = \frac{m_e e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Or, à l'aide de la relation de Planck, on peut relier l'énergie du photon absorbé lors de la transition, dont la fréquence ν vérifie $\Delta E = h\nu$

$$\text{or } \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \text{d'où : } \frac{1}{\lambda_{n,m}} = \frac{\Delta E_{n,m}}{ch} = \frac{m_e e^4}{8 \hbar^3 c \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

On retrouve bien la formule de Rydberg, où $R_H = \frac{m_e e^4}{8 h^3 c \epsilon_0^2}$

avec $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

6. Par le calcul, on trouve $R_H \approx 108\,860 \text{ cm}^{-1}$

Cette valeur est cohérente avec la valeur empirique déterminée par Balmer.
(et après la découverte de Bohr lors de sa publication).

(Rq: avec plus de chiffres significatifs pour les valeurs utilisées, on trouve R_H quasiment égale à la valeur de Balmer)

7. Par définition, l'énergie d'ionisation est l'énergie nécessaire pour arracher un électron à une espèce chimique stable

L'énergie d'ionisation de l'hydrogène correspond donc à l'énergie de la réaction:

$$\text{H} \longrightarrow \text{H}^+ + \text{e}^-$$

Or : $\rightarrow$ au repos (lorsque l'atome d'hydrogène est dans son état fondamental)
l'électron est sur son orbite $n=1$

$\rightarrow$ lorsque l'atome d'hydrogène est ionisé, l'électron est sur l'orbite où $r \rightarrow \infty$.
(il s'éloigne à l'infini). Donc $n \rightarrow \infty$

Ainsi l'énergie d'ionisation E_I est $E_I = \Delta E_{\infty,1} = \frac{m_e e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} = h c R_H$

AN: $E_I \approx 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J}$

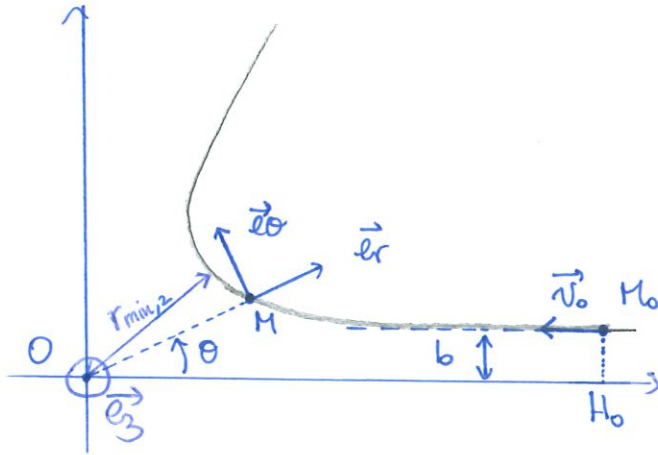
On manipule plus souvent sa valeur en eV: ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

$E_I \approx 13,6 \text{ eV}$

Rq: une unité de mesure d'énergie a été définie à partir de cette grandeur:
le rydberg, telle que: $1 \text{ Ry} = h c R_H$

Exercice 7

1.



2. En O : noyau d'or, de charge $+Ze$
En α : particule α , de charge $+2e$

$$\text{alors } \vec{F} = \frac{(Ze)(2e)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{F} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r}$$

force exercée sur la particule α

L'énergie potentielle associée est $E_p(r) = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r}$

$$(\text{Rappel: } \vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r \text{ où } K = -\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}, \text{ d'où } E_p(r) = -\frac{K}{r} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r})$$

3. En M_0 , la particule a une vitesse v_0 , donc $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$

Or on suppose qu'en M_0 , la particule est supposée "infinitement" loin de O.

donc $E_p = 0$

Finalement, l'énergie mécanique en N_0 est : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0$

La trajectoire sera une branche d'hyperbole (dans le cas d'une interaction répulsive, toutes les trajectoires possibles sont des branches d'hyperbole).

4. Calculons le moment cinétique en O de la particule lorsqu'elle est en N_0 .

$$\vec{L}_O(N_0) = \vec{OM}_0 \wedge (m\vec{v}_0) = (\vec{OH}_0 + \vec{H_0M_0}) \wedge m\vec{v}_0$$

$$= m\vec{OH}_0 \wedge \vec{v}_0 + m\vec{H_0M_0} \wedge \vec{v}_0$$

$$= \vec{0} \text{ car } \vec{OH}_0 \parallel \vec{v}_0$$

$$\text{D'où } \underline{\vec{L}_O(N_0) = mbv_0 \vec{e}_3} \quad (b \text{ est le "bras de levier" de } \vec{v}_0 \text{ en O})$$

Or la force étant centrale, son moment en O est nul, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la particule α :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{donc } \underline{\vec{L}_O = \text{cte}}$$

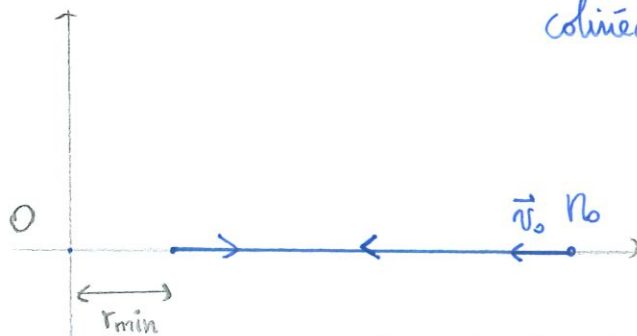
Le moment cinétique est conservé au cours du mouvement.

5. Comme $\vec{L}_O = mbv_0 \vec{e}_z$, si $b \rightarrow 0$ alors $\underline{\vec{L}_O \rightarrow \vec{0}}$

Le moment cinétique devient nul.

$$\text{Or } \vec{L}_O = m \vec{OH} \wedge \vec{v} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \quad \text{car } \begin{cases} \vec{OH} = r\vec{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{cases}$$

Cela signifie que $\dot{\theta} = 0$ au cours du mouvement, et que $\vec{OH}$ et $\vec{v}$ restent colinéaires au cours du mouvement.



La trajectoire est une droite. La particule α se rapproche de O avant de repartir en arrière.

6. Si $b = 0$, il n'y a alors pas de mouvement selon $\vec{e}_\theta$, et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \text{L'énergie mécanique s'écrit : } E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement. En particulier, $E_m = E_{m,0} = \frac{1}{2}mv_0^2$

↑
énergie mécanique en N_0

Or lorsque la particule α atteint la distance minimale $r_{\min}$, alors en ce point $\dot{r} = 0$.

Donc :

$$\underbrace{0 + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r_{\min}}}_{\text{énergie mécanique à la distance minimale.}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{énergie mécanique en } r_0}$$

Ainsi $r_{\min} = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}$

AN: $r_{\min} = \frac{79 \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{\pi \times 8,85 \cdot 10^{-12} \times 4 \times 1,7 \cdot 10^{-27} \times (2 \cdot 10^7)^2}$
 $\approx 27 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

Rp $\Delta m = 4 m_m$

car il y a 2 protons et 2 neutrons dans une particule α .

7. Exprimons l'énergie mécanique dans un cas général :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{or} \quad v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

d'où $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r}$

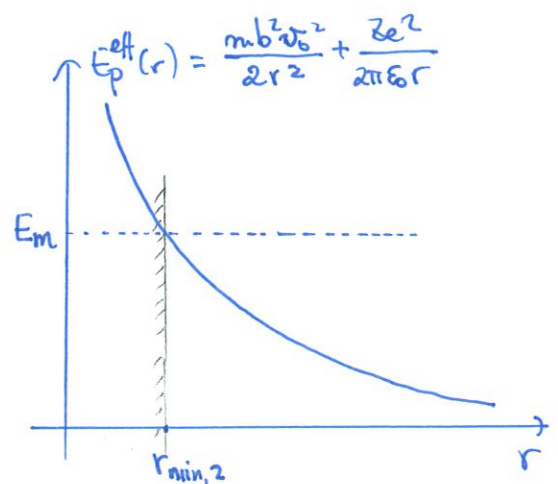
Or par conservation du moment cinétique : $L_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_3 = m b v_0 \vec{e}_3$

D'où $r^2 \dot{\theta} = b v_0$

ainsi $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r^2} + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r}$

Or lorsque $r = r_{\min,2}$, on a $\dot{r} = 0$

et $E_m = \frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r_{\min,2}^2} + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r_{\min,2}}$



Or par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r_{\min, z}^2} + \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 r_{\min, z}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{r_{\min, z}^2} + \frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2 r_{\min, z}} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{r_{\min, z}^2 - \left(\frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right) r_{\min, z} - b^2 = 0}$$

Le discriminant s'écrit $\Delta = \left(\frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2 + 4b^2 > 0$

alors
$$r_{\min, z} = \frac{\frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{4b^2 + \left(\frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2}}{2}$$
 (on ne conserve que la solution positive).

$$\Rightarrow \underline{r_{\min, z} = \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2}}$$

On remarque que l'on retrouve bien $r_{\min}$ si $b=0$.

8. Il faut comparer b à $\frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} = \frac{r_{\min}}{2}$

* Si $b \ll \frac{r_{\min}}{2}$, alors $r_{\min, z} \simeq \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}\right)^2} = \frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2} = \underline{r_{\min}}$

* Si $b \gg \frac{r_{\min}}{2}$, alors $r_{\min, z} \simeq \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{b^2} \simeq \underline{b}$

Cela correspond au cas où la particule α ne subit aucune déviation due au noyau d'or. Sa trajectoire est quasi-rectiligne, et alors la distance minimale d'approche est bien b .

