# Correction TD 16

## Exercice 1

1. On se place au cas limite où $\|\vec{P}\| = \|\vec{F}_{elec}\| \times \frac{1}{100}$

$$\Leftrightarrow \quad m\|\vec{g}\| = |q|\,\|\vec{E}\| \times \frac{1}{100}$$

ainsi $\underline{E_{lim} = \frac{100\,mg}{e} \simeq 1{,}0.10^{-5}\,V.m^{-1}}$

On pourra négliger le poids si $\underline{E > E_{lim}}$

2. On suppose que le proton est initialement au repos. Il est accéléré par une différence de potentielle $U$.

Un théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et l'instant où la vitesse $v$ est acquise donne : $\Delta E_c = qU$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = eU$$

$$\Leftrightarrow \quad U = \frac{mv^2}{2e}$$

On considère que la particule n'est pas relativiste si $v < \frac{c}{100}$

$$\Rightarrow \quad \underline{U < U_{lim} = \frac{m}{2e}\left(\frac{c}{100}\right)^2}$$

AN: $U_{lim} = \frac{1{,}67.10^{-27}}{2\times 1{,}6.10^{-19}} \cdot \left(\frac{3.10^8}{100}\right)^2 \simeq \underline{47\,kV}$

## Exercice 2

1. L'objectif est d'accélérer les électrons entre les points C et E.

Or entre C et E : $\Delta E_c = qV_C - qV_E$ (th. de l'Ec)

et $q = -e$ pour l'électron. Donc $\Delta E_c > 0 \Rightarrow -e(V_C - V_E) > 0$

$$\Rightarrow \underline{V_E - V_C > 0}$$

Rq: autre manière de justifier : il faut que la force $\vec{F}_{élec}$ soit orientée de C vers E afin d'accéléré un électron. Or la force s'écrivant $\vec{F}_{élec} = -e\vec{E}$, il faut donc que $\vec{E}$ soit orienté de E vers C.

Sachant que $\vec{E}$ "descend les potentiels", il faut que $V_C < V_E \Leftrightarrow V_E - V_C > 0$

2. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre C et E :

(on néglige le poids)

$$\Delta E_C = W(\vec{F}_{elec}) = -\Delta E_p = qV_C - qV_E$$

$$\Rightarrow \Delta E_C = -e(V_C - V_E) = eU_0 \quad \text{où } U_0 = V_E - V_C > 0$$

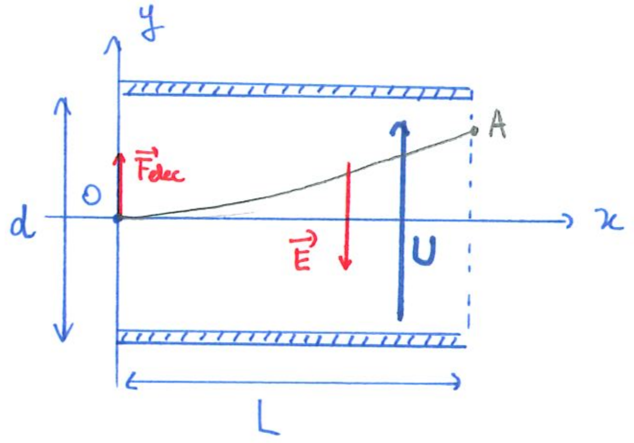
Or $v(C) = 0$

D'où $\frac{1}{2} m_e v(E)^2 = eU_0 \Rightarrow v(E) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}}$

Le mouvement étant uniforme entre C et E : $v_0 = v(E) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}}$

A.N: $v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1000}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 1{,}9 \cdot 10^{7}\, m.s^{-1}$

3. Afin de déterminer le mouvement de l'électron, il faut d'abord déterminer le champ $\vec{E}$ qui règne entre les deux plaques parallèles.




Comme le champ est créé par deux plaques parallèles distantes de d avec une différence de potentiel U:

$$\|\vec{E}\| = \frac{|U|}{d}$$

Enfin sachant que $\vec{E}$ descend les potentiels, on trouve $\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e_y}$

Remarque: sinon, on peut repartir de $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dy}\vec{e_y}$ (car V ne varie que selon $\vec{e_y}$)

ainsi, comme $\vec{E}$ est uniforme : $\vec{E} = -\frac{V_{plaque\,1} - V_{plaque\,2}}{d/2 - (-d/2)}\vec{e_y} = -\frac{U}{d}\vec{e_y}$

(où la plaque 1 est la plaque supérieure).

On se place dans le référentiel du laboratoire galiléen, en étudiant un électron initialement en O avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$.

Bilan des force : $\vec{F}_{élec} = -e\vec{E} = e\frac{U}{d}\vec{e_y}$

On applique le PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{élec} = e\frac{U}{d}\vec{e_y}$

en projection $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : & m\ddot{x} = 0 \\ \text{selon } \vec{e_y} : & m\ddot{y} = e\frac{U}{d} \\ \text{selon } \vec{e_z} : & m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

en intégrant on trouve : $\begin{cases} \dot{x} = A \\ \dot{y} = \frac{eU}{md}t + A' \\ \dot{z} = A'' \end{cases}$ or $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_x}$

d'où $A = v_0$ et $A' = A'' = 0$ et $\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \frac{eU}{md}t \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$

Il n'y a aucun mouvement selon $\vec{e_z}$. Le mouvement est donc limité au plan $(Oxy)$.

en intégrant une nouvelle fois par rapport au temps : $\begin{cases} x(t) = v_0 t + B \\ y(t) = \frac{eU}{md}\cdot\frac{t^2}{2} + B' \end{cases}$

avec les conditions initiales, comme $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} \underline{x(t) = v_0 t} \\ \underline{y(t) = \frac{eU}{2md}t^2} \end{cases}$

Enfin l'équation de la trajectoire s'obtient en combinant les deux équations horaires.

Comme : $t = \frac{x}{v_0}$ on obtient : $\underline{y(x) = \frac{eU}{2md}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}}$

C'est l'équation d'une parabole.

en A, $x = L$ et $\underline{y(L) = \frac{eUL^2}{2mdv_0^2}} = Y_A$

4. On suppose qu'aucune force ne s'applique sur l'électron entre A et B. Le mouvement est donc <u>rectiligne uniforme</u>.

En toute rigueur, l'électron est soumis à son poids et la trajectoire serait une parabole. Cependant, ici nous négligeons la courbure de la parabole entre A et B devant celle entre O et A.

5. La trajectoire entre A et B est une droite qui correspond à la tangente à la trajectoire en A.

La pente est donc donnée par la dérivée de l'équation de la trajectoire en A :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{eUx}{mdv_0^2} \qquad \text{donc} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \frac{eUL}{mdv_0^2}$$

L'équation de la droite est donc donnée par l'équation de la tangente en A :

$$y(x) = y(x=L) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L}(x-L)$$

$$= \frac{eUL^2}{2mdv_0^2} + \frac{eUL}{mdv_0^2}(x-L)$$

$$\underline{y(x) = \frac{eUL}{mdv_0^2}\left(x-\frac{L}{2}\right)}$$

L'électron atteint l'écran au point B, où $x = \frac{L}{2} + D$

d'où $Y_B = y\left(\frac{L}{2}+D\right) = \frac{eUL}{mdv_0^2}\left(\frac{L}{2}+D-\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \underline{Y_B = \frac{eULD}{mdv_0^2}}$

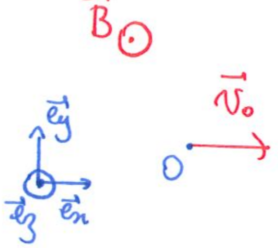
L'ordonnée du spot lumineux est bien <u>proportionnelle à U</u>.

## <u>Exercice 3</u>

1. <u>Réf</u> du laboratoire galiléen

<u>Système</u> : électron de masse $m$

<u>Bilan des forces</u> : force de Lorentz : $\vec{F}_{Lor} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$




On applique le PFD : $\quad m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

$$= -e(\dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z})\wedge(B\vec{e_z})$$

$$= (-e\dot{x}(-\vec{e_y}) - e\dot{y}\vec{e_x})B$$

en projetant, on obtient :
$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : \underline{m\ddot{x} = -e\dot{y}B} \\ \text{selon } \vec{e_y} : \underline{m\ddot{y} = e\dot{x}B} \\ \text{selon } \vec{e_z} : \underline{m\ddot{z} = 0} \end{cases}$$

2. Faisons une analyse dimensionnelle :

$$\left[\frac{eB}{m}\right] = \frac{[eB]}{M}$$ or d'après l'expression de la force de Lorentz :

$$[eB].[v] = [F] = ML.T^{-2}$$

où $[v] = L.T^{-1}$ d'où $[eB] = MT^{-1}$

ainsi $\left[\frac{eB}{m}\right] = \frac{[eB]}{M} = \frac{MT^{-1}}{M} = \underline{T^{-1}}$ $\frac{eB}{m}$ est bien homogène une pulsation.
(c'est la pulsation cyclotron).

3. D'après la question 1 : $m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = \text{cste}$ (par intégration)

or $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$, donc $\dot{z}(t) = 0$

et enfin $z(t) = \text{cste}$ (par intégration)

or $z(0) = 0$, donc $\underline{\forall t,\ z(t) = 0}$ Le mouvement est plan (contenu dans le plan Oxy)

4. Comme $\begin{cases} m\frac{d\dot{x}}{dt} = -eB\dot{y} \\ m\frac{d\dot{y}}{dt} = eB\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega_c\dot{y} & (*) \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = \omega_c\dot{x} & (**) \end{cases}$

$\frac{d(*)}{dt}$ donne : $\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} = -\omega_c\frac{d\dot{y}}{dt} = -\omega_c(\omega_c\dot{x})$ d'où $\underline{\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} + \omega_c^2\dot{x} = 0}$

On obtiendrait $\underline{\frac{d^2\dot{y}}{dt^2} + \omega_c^2\dot{y} = 0}$ en isolant $y(t)$.

5. On reconnait les équations différentielles d'oscillateurs harmoniques :

$$\dot{x}(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$$
$$\dot{y}(t) = A'\cos(\omega_c t) + B'\sin(\omega_c t)$$

or en conditions initiales : $\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{matrix} A = v_0 \\ A' = 0 \end{matrix}$

ainsi $\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) \\ \dot{y}(t) = B'\sin(\omega_c t) \end{cases}$

or en $t=0$, le PFD donne : $\begin{matrix} m\ddot{x}(0) = -e\dot{y}(0)B = 0 \\ m\ddot{y}(0) = eB\dot{x}(0) = eBv_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = \frac{eB}{m}v_0 = \omega_c v_0 \end{cases}$

or $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -v_0 \omega_c \sin(\omega_c t) + B\omega_c \cos(\omega_c t) \\ \ddot{y}(t) = B'\omega_c \cos(\omega_c t) \end{cases}$

donc $\begin{cases} \ddot{x}(0) = B\omega_c = 0 \\ \ddot{y}(0) = B'\omega_c = \omega_c v_0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} B = 0 \\ B' = v_0 \end{cases}$

Finalement : $\begin{cases} \underline{\dot{x}(t) = v_0 \cos(\omega_c t)} \\ \underline{\dot{y}(t) = v_0 \sin(\omega_c t)} \end{cases}$

Afin de trouver $x(t)$ et $y(t)$, on intègre les expressions de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.

$$\begin{cases} x(t) = +\dfrac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + C \\ y(t) = -\dfrac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + C' \end{cases}$$

or à $t=0$, $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} C = 0 \\ C' - \dfrac{v_0}{\omega_c} = 0 \Rightarrow C' = \dfrac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} \underline{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)} \\ \underline{y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c} - \dfrac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t)} \end{cases}$

6. On trouve que : $x^2 + \left(y - \dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \sin^2(\omega_c t) + \left(\dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \cos^2(\omega_c t)$

$$\Rightarrow \underline{x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2}$$

On trouve l'équation paramétrique d'<u>un cercle</u> <u>de centre $O'\left(0, \dfrac{v_0}{\omega_c}\right)$</u> et de <u>rayon $R = \dfrac{v_0}{\omega_c}$</u>

7. On avait $\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\omega_c t) \\ \dot{y}(t) = v_0 \sin(\omega_c t) \end{cases}$

or $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2(\omega_c t) + v_0^2 \sin^2(\omega_c t)} = \sqrt{v_0^2} = \underline{v_0}$

La vitesse reste constante au cours du mouvement. Le mouvement est uniforme.

Autre méthode possible :

* le PFD s'écrit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$

le produit scalaire avec $\vec{v}$ donne : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = -e\underbrace{(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}}_{=0}$ car $\vec{v}\perp\vec{v}\wedge\vec{B}$

d'où $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} = m\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0$

La norme de $\vec{v}$ est constante. Le mouvement est uniforme.

* approche énergétique : $\delta W = (-e\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{dl} = 0$ car $\vec{v}\wedge\vec{B}\perp\vec{v}$ donc la force est orthogonal au mouvement en tout point.

donc $dE_c = 0 \Rightarrow E_c = cste \Leftrightarrow$ mouvement uniforme.

8. On introduit $\underline{x}(t) = x(t) + iy(t)$

donc $\underline{v} = \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt} = v_x + iv_y$

9. Les équations s'écrivaient : $\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -eBv_y \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = eBv_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y & (1) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x & (2) \end{cases}$

Ainsi (1) + i(2) donne: $\dfrac{dv_x}{dt} + i\dfrac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_y + i\omega_c v_x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = i\omega_c(v_x + iv_y)$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = i\omega_c\underline{v}$$ on obtient une équation du premier ordre en $\underline{v}$

10. $\dfrac{d\underline{v}}{dt} - i\omega_c\underline{v} = 0$ La forme générale des solutions est :

$$\underline{v} = \underline{a}\,e^{i\omega_c t} \quad (\underline{a}\in\mathbb{C})$$

$\underline{a}$ constante d'intégration

or à $t=0$ : $\underline{v}(0) = \underline{a}\, e^{i\omega_c \cdot 0} = \underline{a}$

et $\underline{v}(0) = v_x(0) + i v_y(0)$
$= v_0$ car $\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$

Ainsi $\underline{a} = v_0$

Donc $\underline{v}(t) = v_0 e^{i\omega_c t}$

et comme $\begin{cases} v_x(t) = \mathrm{Re}(\underline{v}) \\ v_y(t) = \mathrm{Im}(\underline{v}) \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\omega_c t) \\ v_y(t) = v_0 \sin(\omega_c t) \end{cases}$

11. Le raisonnement est le même qu'à la question 5.

On intègre les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$ et l'on utilise les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

On obtient : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c} - \dfrac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \end{cases}$

Autre méthode : repartons de $\underline{v} = v_0 e^{i\omega_c t}$

en intégrant directement $\underline{v}$ par rapport au temps, on obtient :

$\underline{x}(t) = \dfrac{v_0}{i\omega_c} e^{i\omega_c t} + \underline{b}$ où $\underline{b} \in \mathbb{C}$ constante d'intégration.

$= -i\dfrac{v_0}{\omega_c} e^{i\omega_c t} + \underline{b}$

or à $t=0$, $\underline{x}(0) = x(0) + i y(0) = 0$

donc $0 = -i\dfrac{v_0}{\omega_c} e^{i\omega_c \cdot 0} + \underline{b} \Rightarrow \underline{b} = i\dfrac{v_0}{\omega_c}$

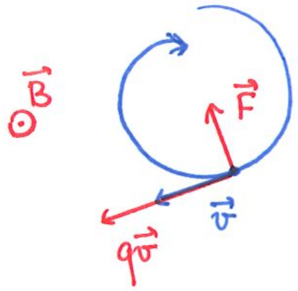
Ainsi $\underline{x}(t) = -i\dfrac{v_0}{\omega_c} e^{i\omega_c t} + i\dfrac{v_0}{\omega_c}$ $= \dfrac{v_0}{\omega_c}(-i)\left(\cos(\omega_c t) + i\sin(\omega_c t)\right) + i\dfrac{v_0}{\omega_c} = \dfrac{v_0}{\omega_c}\left(\sin(\omega_c t) - i\cos(\omega_c t)\right) + i\dfrac{v_0}{\omega_c}$

$= 0$

et alors $\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}(\underline{x}) = \mathrm{Re}\left(-i\dfrac{v_0}{\omega_c} e^{i\omega_c t}\right) + \mathrm{Re}\left(i\dfrac{v_0}{\omega_c}\right) = \dfrac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \mathrm{Im}(\underline{x}) = \dfrac{v_0}{\omega_c} - \dfrac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \end{cases}$

# Exercice 4

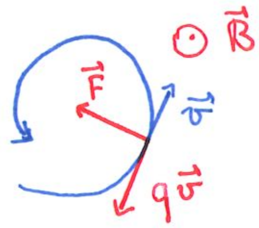
1. Trajectoire 1 :




afin que $((q\vec{v}), \vec{B}, \vec{F})$ forme un trièdre direct, il faut que $q\vec{v}$ soit dans le même sens que $\vec{v}$

Donc $q > 0$

Trajectoire 2 :




Il faut que $q\vec{v}$ et $\vec{v}$ soient de sens opposés. Donc

$q < 0$

Trajectoire 3

La particule n'est pas déviée par la présence du champ magnétique. Cela signifie que la particule n'est pas chargée (et qu'elle n'est pas soumise à la force de Lorentz), $q = 0$

2. Si la force qui s'applique sur les particules est la force de Lorentz, alors le mouvement devrait être circulaire, donc le rayon est $\frac{mv}{eB}$.

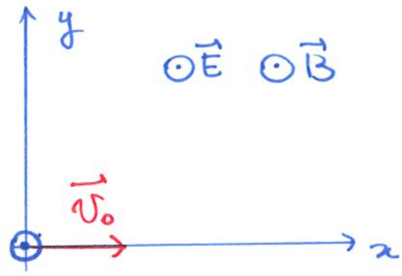
En réalité, les particules évoluent dans un fluide et subissent des forces de frottement. La vitesse n'est donc pas constante mais diminue au cours du mouvement. Cela aura pour effet de diminuer le rayon de courbure proportionnel à $v$ (conséquence d'une diminution de la norme de la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$) et donne donc lieu à des trajectoires en spirales.

# Exercice 5

1. Réf : du laboratoire galiléen

Système : électron de charge $-e$

Bilan des forces : force de Lorentz : $\vec{F}_{Lor} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$



On applique le PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{Lor} = -e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B}$

$$= -eE\vec{e_z} - e(\dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z})\wedge B\vec{e_z}$$

$$= -eE\vec{e_z} - e\dot{x}B(-\vec{e_y}) - e\dot{y}B\vec{e_x}$$

On projette : $\begin{cases} \underline{m\ddot{x} = -e\dot{y}B} \quad (1) \\ \underline{m\ddot{y} = +e\dot{x}B} \quad (2) \\ \underline{m\ddot{z} = -eE} \quad (3) \end{cases}$

* Mouvement selon $\vec{e_z}$ :

$$m\ddot{z} = -eE \Rightarrow \dot{z}(t) = -\frac{eE}{m}t + A = -\frac{eE}{m}t \quad \text{car } \dot{z}(0)=0$$

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{eE}{2m}t^2 + A' = \underline{-\frac{eE}{2m}t^2} \quad \text{car } z(0)=0$$

Le mouvement selon $\vec{e_z}$ est accéléré.

* Mouvement transverse à $\vec{e_z}$ (selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$) :

$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eB}{m}\dot{y} = -\omega_c\dot{y} \quad (1) \quad \text{où } \omega_c = \frac{eB}{m} \\ \ddot{y} = \frac{eB}{m}\dot{x} = +\omega_c\dot{x} \quad (2) \end{cases}$ → même situation que dans le cours !

Si l'on intègre par rapport à t on trouve : $\begin{cases} \dot{x} = -\omega_c y + C \\ \dot{y} = \omega_c x + C' \end{cases}$

or à $t=0$ $\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 = -\omega_c y(0) + C = C \quad \text{car } y(0)=0 \\ \dot{y}(0) = 0 = \omega_c x(0) + C' = C' \quad \text{car } x(0)=0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \dot{x} = -\omega_c y + v_0 \quad (1') \\ \dot{y} = \omega_c x \quad (2') \end{cases}$

Ainsi (1) et (2') donne : $\ddot{x} = -\omega_c\dot{y} = -\omega_c^2 x \Rightarrow \underline{\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0}$

(2) et (1') donne : $\ddot{y} = \omega_c\dot{x} = \omega_c(-\omega_c y + v_0) \Rightarrow \underline{\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c^2 \cdot \frac{v_0}{\omega_c}}$

On obtient deux équations différentielles d'oscillateurs harmonique dont les solutions s'écrivent :

$\begin{cases} x(t) = \alpha\cos(\omega_c t) + \beta\sin(\omega_c t) \\ y(t) = \alpha'\cos(\omega_c t) + \beta'\sin(\omega_c t) + \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$ ← solution particulière constante.

Or les conditions initiales sont : $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{x}(0)=v_0 \\ \dot{y}(0)=0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x(0)=\alpha=0 \\ y(0)=\alpha'+\dfrac{v_0}{\omega_c}=0 \Rightarrow \alpha'=-\dfrac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$

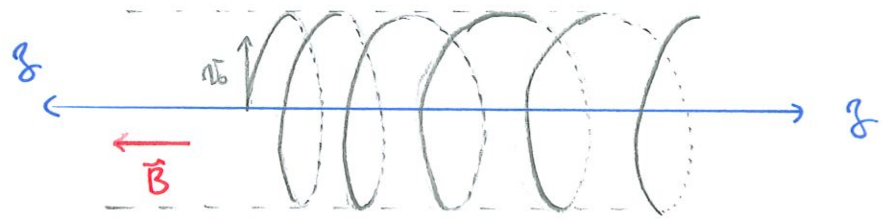
et $\begin{cases} \dot{x}(0)=v_0=\beta\omega_c \Rightarrow \beta=\dfrac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0)=0=\beta'\omega_c \Rightarrow \beta'=0 \end{cases}$

Finalement : $\begin{cases} \underline{x(t)=\dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)} \\ \underline{y(t)=\dfrac{v_0}{\omega_c}-\dfrac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t)} \end{cases}$

Selon $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, le mouvement est le même que dans le cas d'un champ $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v_0}$.

Finalement, le mouvement de l'électron est la composition de deux mouvements : une translation accélérée selon $\vec{e_z}$ et un mouvement circulaire uniforme selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.

La trajectoire est donc une hélice de rayon $\dfrac{v_0}{\omega_c}$.




Les anneaux sont de plus en plus éloignés à cause de l'accélération selon $\vec{e_z}$.

2. Cette fois-ci le PFD donne :

$$m\vec{a}=-eE\vec{e_y}+e\dot{x}B\vec{e_y}-e\dot{y}B\vec{e_x}$$

et donc $\begin{cases} m\ddot{x}=-eB\dot{y} \\ m\ddot{y}=-eE+eB\dot{x} \\ m\ddot{z}=0 \end{cases}$

* Mouvement selon $\vec{e_z}$ : $m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = cste$ or $\dot{z}(0) = 0$

Donc il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e_z}$

Le mouvement de la particule est plan (dans le plan $Oxy$)

* Mouvement dans le plan $(Oxy)$

Afin de déterminer $x(t)$ et $y(t)$, on utilise la méthode des complexes en introduisant $\underline{x} = x(t) + iy(t)$ et $\underline{v}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt}$

Ainsi $\begin{cases} m\ddot{x} = -eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -eE + eB\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega_c\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\frac{eE}{m} + \omega_c\dot{x} & (2) \end{cases}$ où $\omega_c = \frac{eB}{m}$

(1)+i(2) donne : $\ddot{x} + i\ddot{y} = -\omega_c\dot{y} - i\frac{eE}{m} + i\omega_c\dot{x}$

$$= +i(i\omega_c\dot{y}) - i\frac{eE}{m} + i\omega_c\dot{x}$$

$$= i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y}) - i\frac{eE}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = +i\omega_c\underline{v} - i\frac{eE}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} - i\omega_c\underline{v} = -i\frac{eE}{m} = -i\omega_c \cdot \frac{E}{B}$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

La solution s'écrit :

$$\underline{v} = \underline{a}e^{i\omega_c t} + \frac{E}{B}$$

solution particulière constante

or les conditions initiales donnent : $\underline{v}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = v_0$

ainsi $\underline{v}(0) = \underline{a} + \frac{E}{B} = v_0 \Rightarrow \underline{a} = v_0 - \frac{E}{B}$

et $\underline{v}(t) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right)e^{i\omega_c t} + \frac{E}{B}$

Cela donne $\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathrm{Re}(\underline{v}) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\cos(\omega_c t) + \frac{E}{B} \\ \dot{y}(t) = \mathrm{Im}(\underline{v}) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\sin(\omega_c t) \end{cases}$

en intégrant par rapport à t :

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}\right)\sin(\omega_c t) + \frac{E}{B}t + b \\ y(t) = -\left(\frac{v_0}{\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}\right)\cos(\omega_c t) + b' \end{cases}$$

or à $t=0$, $\begin{cases} x(0) = 0 = b \\ y(0) = 0 = -\left(\frac{v_0}{\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}\right) + b' \end{cases} \Rightarrow b' = \frac{v_0}{\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}$

D'où
$$\begin{cases} \underline{x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}\right)\sin(\omega_c t) + \frac{E}{B}t} \\ \underline{y(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}\right)\left(1 - \cos(\omega_c t)\right)} \end{cases}$$

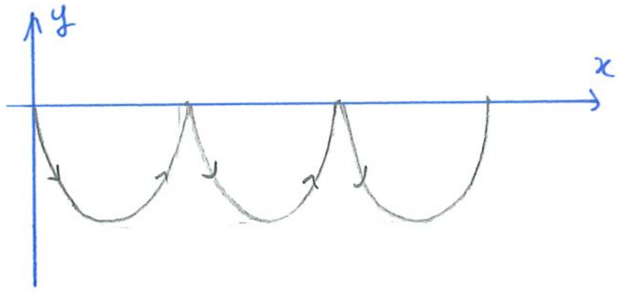
on pose $v_c = \frac{E}{B}$ et $R = \frac{v_0 - v_c}{\omega_c} = \frac{v_0}{\omega_c}\left(1 - \frac{v_c}{v_0}\right)$

D'où $\underline{(x - v_c t)^2 + (y - R)^2 = R^2}$

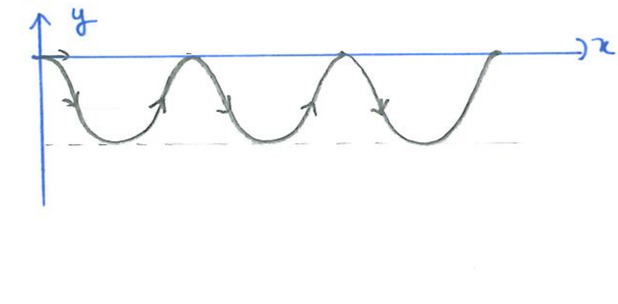
La trajectoire est décrite par un cercle de rayon R et de centre mobile $C(v_c t, R)$. Le centre du cercle est translaté selon $\vec{e_x}$ au cours du temps.

La trajectoire est une cycloïde.

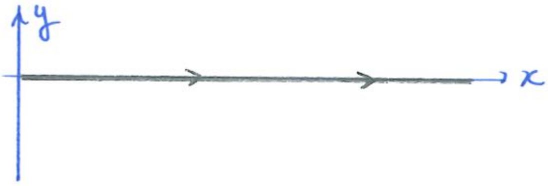
Si $v_0 = 0$ : alors $R = \frac{v_c}{\omega_c}$. Initialement, l'électron ne subit que la force due au champ $\vec{E}$, selon $-\vec{e_y}$. Ensuite, lorsque la vitesse devient non nulle, le champ $\vec{B}$ dévie la particule. Au bout de $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$, l'électron retrouve le même état qu'à $t=0$, mais translatée de $v_c . T = 2\pi R$.




Si $0 < v_0 < v_c$ : la trajectoire ressemble à celle pour $v_0 = 0$, cependant ici, comme à $t=0$ la vitesse est selon $\vec{e_x}$, il y a une tangente horizontale.

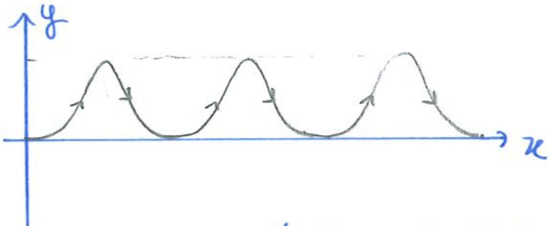


Si $v_0 = v_c$ : alors $R=0$. Cela correspond à la situation où $-eE\vec{e_y} - e v_0\vec{e_x} \wedge B\vec{e_z} = \vec{0}$

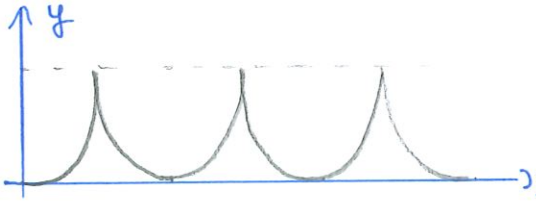



Les deux forces (magnétique et électrique) se compensent en $t=0$, donc $\vec{v}$ reste selon $\vec{v_0}$ et le mouvement est rectiligne uniforme.

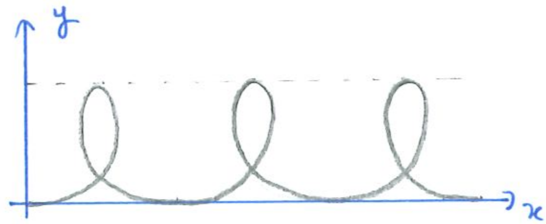
Si $v_0 > v_c$ : ainsi à $t=0$, c'est la force magnétique qui domine. L'électron est donc d'abord dévié selon $+\vec{e_y}$.




* Pour $v_0$ proche de $v_c$, la force magnétique reste trop faible pour significativement dévier la particule vers $+\vec{e_y}$




* Dans le cas limite où $v_0 = 2v_c$ : on n'observe pas de boucle. À l'instant où la vitesse est selon $+\vec{e_y}$, elle s'annule et la force électrique inverse le sens de $\vec{v}$, l'$e^-$ repart selon $-\vec{e_y}$.




* Si $v_0 > 2v_c$ : on observe des boucles apparaître, car la force magnétique est alors dominante dans la dynamique de l'électron.

Plus $\frac{v_0}{v_c}$ sera grand, plus les boucles seront importantes.

À la limite où $\frac{v_0}{v_c} \to \infty$, on retrouve la trajectoire circulaire.

Rq: étudier $\frac{v_0}{v_c}$ revient à étudier $\frac{v_0}{E/B} = \frac{v_0 B}{E} = \frac{e v_0 B}{eE} = \frac{\|\vec{F}_{elec}\|}{\|\vec{F}_{mag}\|}$

# Exercice 6

1. Il règne entre les plaques $P_M$ et $P_N$ un champ électrique uniforme. Les charges électriques subissent donc une force de Lorentz constante lors de leur mouvement entre ces plaques $\vec{F}_{Lor} = q\vec{E}$. Comme $\vec{E}$ est selon $\vec{e}_x$, et que la vitesse initiale des ions au point M est négligeable, les ions auront donc un <u>mouvement rectiligne</u>.
La force étant constante, l'accélération l'est également (d'après le PFD) et donc le mouvement est <u>uniformément accéléré</u>.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un ion ${}^{3}_{2}He^{+}$ entre les points M et N dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - 0 = W_{M\to N}(\vec{F}_{Lor})$$

vitesse négligeable en M

$$= -\Delta E_p$$

$$= -\left(E_p(N) - E_p(M)\right)$$

$$= qV_M - qV_N = eU_0$$

D'où $\underline{m_1 v_1^2 = 2eU_0}$

Un raisonnement similaire pour les ions ${}^{4}_{2}He^{+}$ et ${}^{6}_{2}He^{+}$ donne : $\underline{m_2 v_2^2 = m_3 v_3^2 = 2eU_0}$

C'est une conséquence du fait que le travail de la force électrique de Lorentz ne dépend que de la charge q de la particule, qui est la même pour les 3 ions.

2. On souhaite que les ions ${}^{4}_{2}He^{+}$ aient un mouvement rectiligne entre N et O.
Appliquons le PFD à un ion ${}^{4}_{2}He^{+}$ :

$$m_2\vec{a} = \vec{F}_{Lor} = e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

A priori, $\vec{B} = B_x\vec{e_x} + B_y\vec{e_y} + B_z\vec{e_z}$ (où $B_x, B_y, B_z$ les composantes de $\vec{B}$)

Or si le mouvement est rectiligne, alors $\vec{v} = v\vec{e_x}$ (car $\vec{v}(0) = \vec{v_2} = v_2\vec{e_x}$)

ainsi $\vec{v}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -vB_z \\ vB_y \end{vmatrix}$

Le PFD projeté s'écrit : $\begin{cases} m_2\ddot{x} = 0 \\ m_2\ddot{y} = eE - evB_z \\ m_2\ddot{z} = evB_y \end{cases}$

Or, pour avoir un mouvement rectiligne, il faut que $\ddot{y} = 0$ et $\ddot{z} = 0$

donc il faut $\begin{cases} eE - evB_z = 0 \\ evB_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_z = \frac{E}{v} = \frac{E}{v_2} \\ B_y = 0 \end{cases}$

car $v = v_2 = \text{cste}$

car $\ddot{x} = 0$

Ainsi le champ magnétique doit respecter $\begin{cases} \underline{B_y = 0} \\ \underline{B_z = \frac{E}{v_2}} \end{cases}$ (et $B_x$ peut prendre n'importe quelle valeur)

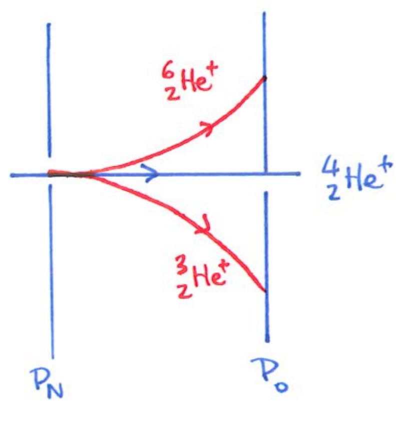
On aura donc forcément un champ magnétique d'intensité nulle selon $\vec{e_y}$.

3. Pour les autres particules, le PFD s'écrit : $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = eE - ev.\frac{E}{v_2} = eE\left(1 - \frac{v}{v_2}\right) \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

Ainsi, pour ${}^3_2He^+$, comme $m_1 < m_2$ et $m_1v_1^2 = m_2v_2^2$, alors $v_1 > v_2$

alors à $t=0$ : $m\ddot{y} = eE\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) < 0$

<u>ils sont déviés selon $-\vec{e_y}$</u>

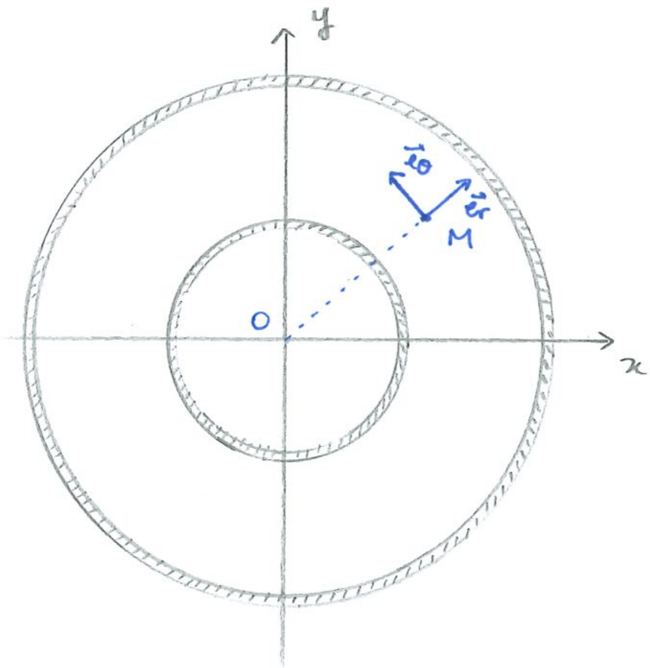



et pour ${}^6_2He^+$, comme $m_3 > m_2$ et $m_2v_2^2 = m_3v_3^2$

alors $v_3 < v_2$ et à $t=0$ : $m\ddot{y} = eE\left(1 - \frac{v_3}{v_2}\right) > 0$

<u>ils sont déviés selon $+\vec{e_y}$</u>

# Exercice 7




1. <u>Réf</u> : du laboratoire galiléen

<u>Système</u> : électron de masse m
et de charge $q = -e$

<u>Bilan des forces</u> : force électrique de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lor} = q\vec{E} = -e\vec{E}$$

Le PFD donne : $m\vec{a} = -e\vec{E}$

<u>Projection de $\vec{a}$ dans la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$</u> :

$$\vec{OM} = r\vec{e_r} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

<u>Projection du PFD</u> :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -e \cdot E_0 \frac{r_0}{r} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

2. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, $r = r_0 =$ constante

Les équations différentielles deviennent :

$$\begin{cases} -m r_0 \dot{\theta}^2 = -eE_0 \quad (1) \\ m r_0 \ddot{\theta} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

or $\vec{v} = r_0\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

d'où, comme $\dot{\theta} =$ cste d'après (2), $\|\vec{v}\| = r_0|\dot{\theta}|$
$=$ cste

$\Rightarrow$ le mouvement est uniforme.

et (1) devient : $-m \cdot \frac{v_0^2}{r_0} = -eE_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{eE_0 r_0}{m}}$

3. Comme $\dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0} = \sqrt{\frac{eE_0}{r_0 m}}$, et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega = \dot{\theta} =$ vitesse angulaire

alors $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0 m}{e E_0}}$

4. On considère une perturbation telle que : $\begin{cases} r = r_0(1+\alpha) \\ \omega = \omega_0(1+\beta) \end{cases}$ où $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

où $|\alpha(t)| \ll 1$, $|\beta(t)| \ll 1$ et alors $\begin{cases} \dot{r} = r_0\dot{\alpha} \\ \dot{\omega} = \omega_0\dot{\beta} \end{cases}$ et $\ddot{r} = r_0\ddot{\alpha}$

l'équation : $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -eE_0\dfrac{r_0}{r}$ devient :

$$m\left(r_0\ddot{\alpha} - r_0(1+\alpha)\cdot\omega_0^2(1+\beta)^2\right) = -eE_0\frac{r_0}{r_0(1+\alpha)}$$

$$\Rightarrow m\left[r_0\ddot{\alpha} - r_0\omega_0^2(1+\alpha)(1+2\beta+\beta^2)\right] = -eE_0(1+\alpha)^{-1}$$

$$\Rightarrow m\left[r_0\ddot{\alpha} - r_0\omega_0^2(1+2\beta+\alpha+\underbrace{\beta^2+2\alpha\beta}_{\text{termes d'ordre 2}}+\underbrace{\alpha\beta^2}_{\text{terme d'ordre 3}})\right] = -eE_0\underbrace{(1+\alpha)^{-1}}_{\simeq 1-\alpha \text{ à l'ordre 1}}$$

$$\Rightarrow mr_0\left[\ddot{\alpha} - \omega_0^2(1+2\beta+\alpha)\right] = -eE_0(1-\alpha) \quad \text{à l'ordre 1}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} - \omega_0^2 - \omega_0^2\alpha - 2\omega_0^2\beta = -\underbrace{\frac{eE_0}{mr_0}}_{=\omega_0^2}(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} - 2\omega_0^2\alpha - 2\omega_0^2\beta = 0 \quad (*)$$

Or la seconde équation : $m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$ donne :

$$2r_0\dot{\alpha}\omega_0(1+\beta) + r_0(1+\alpha)\omega_0\dot{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{\alpha}(1+\beta) + \dot{\beta}(1+\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{\alpha} + \underbrace{\dot{\alpha}\beta}_{\text{ordre 2}} + \dot{\beta} + \underbrace{\alpha\dot{\beta}}_{\text{ordre 2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0 \quad \text{à l'ordre 1}$$

Alors $2\alpha + \beta = \text{cste}$, notamment $2\alpha(t) + \beta(t) = 2\alpha(0) + \beta(0)$
$= 2\alpha_0 + 0$

$2\dot{\alpha} + \dot{\beta} = \dfrac{d}{dt}(2\alpha+\beta) = 0$

Ainsi $(*)$ devient : $\ddot{\alpha} + 2\omega_0^2\alpha - 4\omega_0^2\alpha - 2\omega_0^2\beta = 0$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + 2\omega_0^2 \alpha - 2\omega_0^2 \underbrace{(2\alpha+\beta)}_{=2\alpha_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + 2\omega_0^2 \alpha = 4\omega_0^2 \alpha_0$$

On trouve l'équation différentielle cherchée.

Il s'agit d'une équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
Donc la fonction $t \mapsto \alpha(t)$ est une fonction bornée (elle ne diverge pas), ce qui indique que la trajectoire circulaire est stable. De plus, l'approximation $|\alpha(t)| \ll 1$ reste donc valable.

Rq: $\alpha(t)$ oscille à la pulsation $\sqrt{2}\omega_0$ (le rayon de la trajectoire oscille légèrement au cours du mouvement) et $\beta(t) = 2(\alpha(t) - \alpha_0)$ également.