DM7 Correction

Exercice 1

1. Dans les Dee, les protons sont soumis uniquement à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.

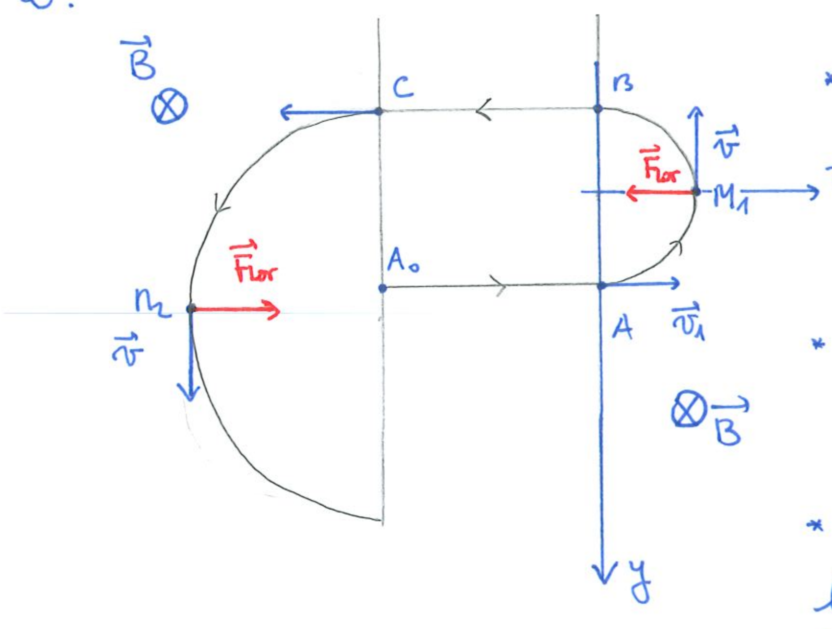
Méthode 1 : PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v}\wedge\vec{B} \Rightarrow m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = e(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v} = 0$

car $\vec{v} \perp (\vec{v}\wedge\vec{B})$

d'où $\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = cste$

Méthode 2 : Le travail $\delta W = (q\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{dl} = 0$ car la force de Lorentz magnétique est par construction orthogonale au mouvement.
La variation d'énergie cinétique est donc nulle au cours du mouvement.
Le mouvement est donc uniforme.

2.



* La force de Lorentz est orthogonale à la trajectoire, et vers l'intérieur de la trajectoire circulaire.

* Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement.

* On trouve le champ $\vec{B}$ en appliquant la règle de la main droite (sachant que $q > 0$ pour le proton).

3. Réf : du laboratoire galiléen
Système : un proton
Bilan des forces : $\vec{F}_{Lor} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = e\vec{v}\wedge\vec{B}$

En coordonnées cartésiennes, avec le système d'axe défini par les axes sur le schéma :

$$\begin{cases} \vec{B} = B\vec{e_z} \\ \vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z} \end{cases}$$

donc $e\vec{v}\wedge\vec{B} = ev_yB\vec{e_x} - ev_xB\vec{e_y}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au proton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v}\wedge\vec{B}$$

projeté dans $(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = +ev_yB \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -ev_xB \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

où $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron.

Avec une analyse dimensionnelle, on montre que :

$$\left[\frac{eB}{m}\right] = \frac{[eB]}{M} = \frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$$

La quantité $\frac{eB}{m}$ est bien homogène à une pulsation.

car $[evB] = [\text{force}] = ML.T^{-2}$

donc $[eB] = M.T^{-1}$

4. La vitesse étant constante (mouvement uniforme), la vitesse dans le Dee 1 sera de V_1 (vitesse en entrée du Dee).

La trajectoire étant circulaire, la norme de la vitesse est égale au rayon de la trajectoire multiplié par la vitesse de rotation.

Donc $\|v\| = V_1 = R_1 \times \omega_c \Rightarrow R_1 = \dfrac{V_1}{\omega_c}$

Rq: pour plus de détails, il faudrait introduire la base polaire, et montrer que $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ et avec le PFD, on trouve $\dot{\theta} = -\omega_c$

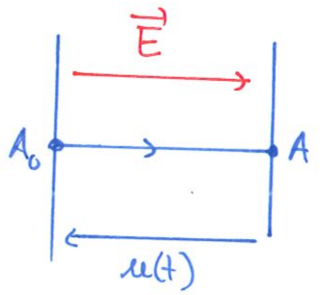
5. Lors du $n^{ième}$ demi-tour, la distance parcourue est $\frac{2\pi R_n}{2} = \pi R_n$ car la trajectoire dans correspond à un demi cercle de rayon R_n.

6. Comme $R_n = \frac{V_n}{\omega_c}$ et la distance parcourue lors de la $n^{ème}$ traversée d'un Dee est πR_n, le temps de parcours est :

$$\Delta t = \frac{\pi R_n}{V_n} = \frac{\pi \cdot V_n/\omega_c}{V_n} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{eB}$$

On trouve que Δt ne dépend pas de n. Le temps de parcours est donc le même à chaque traversée d'un Dee.

7. Lors du trajet $A_0 \to A$:

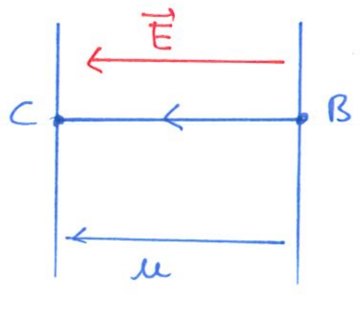


Afin que le proton soit accéléré, il faut que la force de Lorentz soit selon le sens A_0 vers A.

Or $\vec{F}_{Lor} = e\vec{E}$, donc $\vec{E}$ doit également être orienté de A_0 vers A.

Comme $\vec{E}$ descend les potentiels, cela signifie que le potentiel $V(A_0)$ en A_0 est plus élevé que celui en A, $V(A)$. Or $u = V(A_0) - V(A)$, donc $u > 0$

Lors du trajet $B \to C$:



De nouveau, comme on veut que le proton soit accéléré de B vers C, il faut que $\vec{E}$ soit orienté de B vers C.

Or $\vec{E}$ descend les potentiels, donc $V(C) < V(B)$

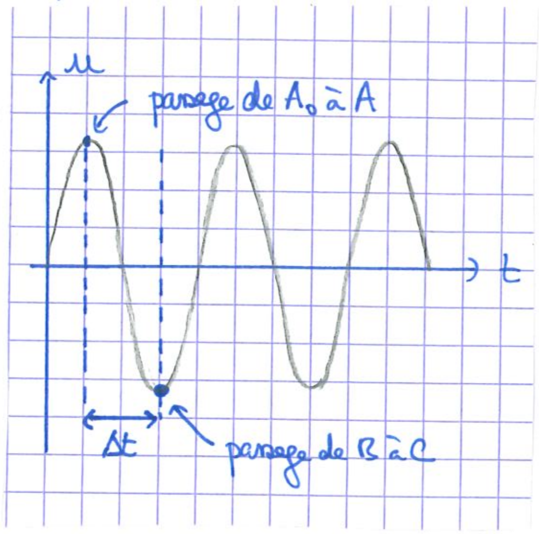
et $u = V(C) - V(B) < 0$

En fonction du trajet du proton, il faut adapter le signe de u.

8. Le passage de A_0 à A se fait lorsque la tension est positive et maximale (afin d'accélérer le proton). Comme les Dees sont très faiblement écartés, cette durée sera très courte.

Le passage de B à C, pour des raisons analogues, se fait pour u minimale ($u<0$)

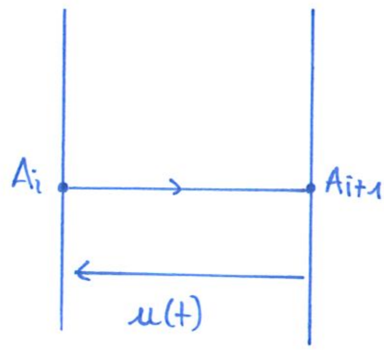
La durée Δt doit correspondre à une demi-période.



9. Il faut donc $\Delta t = \frac{T}{2}$

or $\Delta t = \frac{\pi m}{eB}$, donc $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{eB}{2\pi m}$

10. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie de l'espace entre Dees (entre les points A_i et A_{i+1})



$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_{i+1}^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \underbrace{eV(A_i) - eV(A_{i+1})}_{\text{travail de la force de Lorentz électrique entre } A_i \text{ et } A_{i+1}}$$

or $V(A_i) - V(A_{i+1}) = U$ par hypothèse, où U est la valeur maximale de $u(t)$

D'où $v_{i+1}^2 - v_i^2 = \frac{2eU}{m}$ $\Rightarrow$ $v_{i+1} = \sqrt{v_i^2 + \frac{2eU}{m}}$

11. Chaque demi-tour, de durée Δt, l'énergie cinétique augmente de eU.
Il faut donc faire $n = \frac{E}{2eU}$ tours pour atteindre l'énergie E. Cela prend donc un temps $t_E = n \times 2\Delta t$ $\Rightarrow$ $t_E = \frac{E}{2eU} \times 2 \times \frac{\pi m}{eB} = \frac{\pi m E}{e^2 U B}$

Application numérique : $t_E = 1,23\ \mu s$

$n \simeq 32$ (arrondi à l'entier supérieur)

$v_{finale} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \simeq 3,5.10^7\ m/s$

12. Si le rayon du cyclotron est R, alors le rayon maximal de la trajectoire dans un Dee est $R_{max} = R$

Or $R_{max} = \frac{V_{max}}{\omega_c}$ d'où $V_{max} = R_{max} \times \omega_c = \frac{ReB}{m}$

AN: $V_{max} = 1,6.10^7\ m/s$

soit environ $\frac{1}{20}$ de la vitesse de la lumière.