TD16 – Mouvement de particules chargées

On rappelle que la masse d'un proton est de $m_p = 1,67.10^{-27}$ kg, la masse d'un électron de $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg.

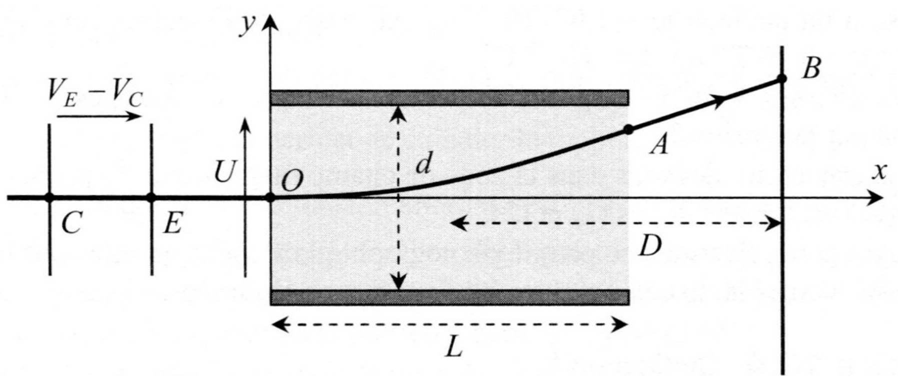
EXERCICE 1 : Limites de validité des hypothèses courantes (⋆)

Un proton de masse m_p, ayant une vitesse initiale nulle, est accéléré dans le vide par un champ électrostatique $\vec{E}$. On note U la différence de potentiel entre sa position initiale et sa position finale où la vitesse v a été acquise.

1. On considère que le poids de la particule n'est plus négligeable quand il dépasse le centième de la valeur de la force électrique. Calculer la valeur limite E_{lim} du champ E pour laquelle le poids n'est plus négligeable.
2. On considère la vitesse v de la particule comme relativiste quand elle dépasse le centième de la vitesse c de la lumière. Calculer la valeur limite U_{lim} de la tension pour laquelle le proton acquiert une vitesse relativiste.

EXERCICE 2 : Déviation d'un faisceau d'électrons (⋆)

Dans un oscilloscope analogique, un faisceau d'électrons émis en un point C, avec une vitesse quasi nulle, est accéléré par une tension U_0 entre les points C et E situés sur un axe (Ox). Puis il pénètre en O, avec la vitesse $v_0\vec{e}_x$, dans le champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme régnant entre deux plaques parallèles métalliques, symétriques par rapport au plan (Oxz), de longueur L et séparées par une distance d. Le champ est créé par une tension U appliquée entre ces plaques. Le faisceau sort en A de la zone où règne le champ, puis il atteint finalement l'écran de l'oscilloscope en un point B (spot lumineux). L'écran est à la distance D du milieu des plaques.



1. Indiquer, en le justifiant, le signe de $V_{\text{E}} - V_{\text{C}}$.
2. Exprimer, en fonction de $U_0 = |V_{\text{E}} - V_{\text{C}}|$, la norme v_0 de la vitesse au point O d'un électron, de masse m_e. Faire l'application numérique avec $U_0 = 1000$ V.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron entre O et A. En déduire l'ordonnée Y_{A} du point de sortie A.
4. Quel est la nature du mouvement d'un électron entre A et B, où ne règne aucun champ ?
5. Déterminer l'équation de cette trajectoire et montrer que l'ordonnée Y_{B} du spot est proportionnelle à la tension U appliquée entre les plaques.

EXERCICE 3 : Mouvement dans un champ magnétique uniforme (⋆)

On considère un électron de masse m et de charge $q = -e$ placée dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Elle part à l'instant $t = 0$ du point O, origine du repère cartésien lié au référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Sa vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. On néglige toute autre force que la force de Lorentz. On cherche à montrer que la trajectoire est bien un cercle.

1. Déterminer trois équations différentielles couplées en $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ à l'aide du PFD.
2. Montrer que le rapport $\frac{eB}{m}$ est homogène à une pulsation. On le note ω_c.
3. Déterminer $z(t)$.
On cherche à résoudre le système couplé constitué des 2 autres équations .
4. Déterminer une équation différentielle ne portant que sur $x(t)$. Faire de même avec $y(t)$.
5. En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ à l'aide des conditions initiales.
6. Montrer que les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ correspondent à celle d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
7. Montrer, à partir des équations du mouvement, que la trajectoire est décrite uniformément. Retrouver ce résultat par une autre méthode.

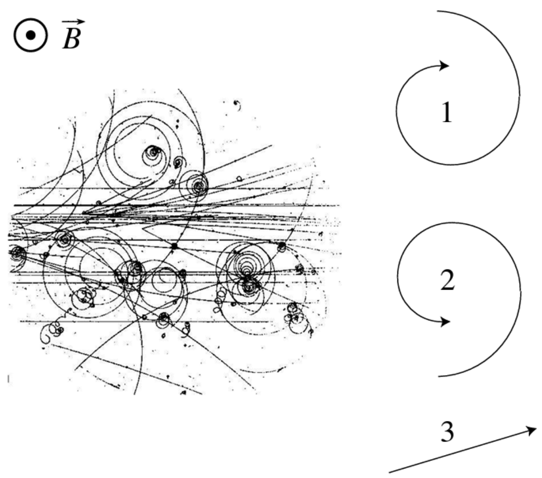
(⋆⋆) On propose une nouvelle méthode de résolution du système couplé. Pour cela on introduit la grandeur complexe $\underline{x}(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.

8. Exprimer $\underline{v} = \frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $v_x = \dot{x}$ et $v_y = \dot{y}$.
9. À l'aide des équations couplées obtenues à la question 1, déterminer une équation différentielle du premier ordre portant sur $\underline{v}$.
10. Résoudre cette équation différentielle en faisant intervenir une constante d'intégration $\underline{a}$, à exprimer à l'aide des conditions initiales. En déduire les expressions (réelles) de $v_x(t)$ et $v_y(t)$.
11. Finalement, retrouver les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

EXERCICE 4 : Chambres à bulles (⋆)

Pour visualiser les trajectoires des particules chargées, les premiers détecteurs étaient des chambres à bulles dans lesquelles les particules (électrons, protons, neutrons...) déclenchaient la formation de bulles dans un liquide et marquaient ainsi leur passage par une traînée de bulles.

La figure ci-contre représente un cliché typique des traces observées lors d'une collision à haute énergie de particules au CERN (Centre Européen pour la Recherche Nucléaire). Sur le côté droit, on a schématisé les trois types de trajectoires observées avec leur sens de parcours.



Dans ces chambres à bulles, il règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$. Par ailleurs, le passage dans le liquide conduit à une lente décélération des particules.

1. Déterminer le signe de la charge pour les trois types de trajectoires observées.
2. Expliquer qualitativement pourquoi les trajectoires observées ne sont pas circulaires mais s'enroulent en spirales dont le rayon diminue.

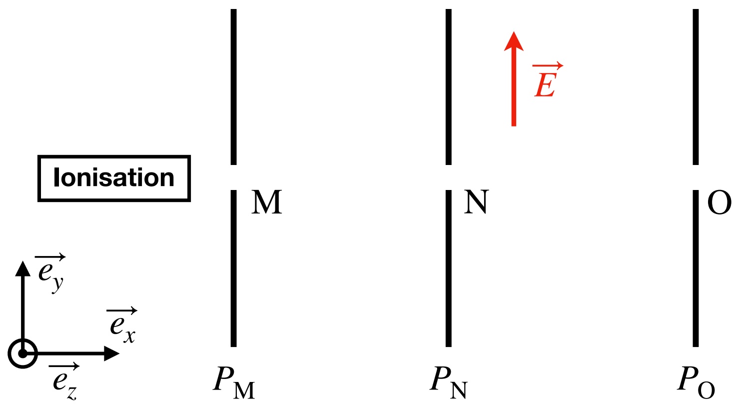
EXERCICE 5 : Champs couplés (⋆⋆)

1. **Champ électrique et magnétiques parallèles**
   On considère un champ $\vec{E} = E\vec{e}_z$ et un champ $\vec{B} = B\vec{e}_z$ tous deux constants et uniforme. Soit M un électron de charge $-e$ placé initialement au point O (origine du repère) dans ce champ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. Le poids de l'électron est supposé négligeable devant la force de Lorentz.
   Établir les équations du mouvement en x, y et z puis en déduire l'allure de la trajectoire.

2. (⋆ ⋆ ⋆) **Champ électrique et magnétiques croisés**
   On considère un électron de charge $-e$ placé dans un champ $\vec{E} = E\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Soit M un électron de charge $-e$ placé initialement au point O (origine du repère) dans ce champ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. Le poids de l'électron est supposé négligeable devant la force de Lorentz. On considérera en particulier le cas $v_0 = 0$.
   Établir les équations du mouvement en x, y et z, les résoudre puis en déduire l'allure de la trajectoire.

EXERCICE 6 : Sélecteur de vitesse (⋆⋆)

Un dispositif produit des ions d'hélium, ${}^3_2He^+$, ${}^4_2He^+$ et ${}^6_2He^+$ de masses respectives m_1, m_2 et m_3. Ils sortent du dispositif d'ionisation puis entrent avec une vitesse très faible en M dans un accélérateur linéaire où ils sont soumis à l'action d'un champ électrique uniforme créé par une différence de potentiel entre deux plaques P_M et P_N, $U_0 = V_\mathrm{M} - V_\mathrm{N}$. On désignera par $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$ les vecteurs vitesses en N des ions. On notera e la charge électrique élémentaire, et on utilise la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ représentée sur le schéma.



1. Décrire le mouvement des ions entre P_M et P_N.
   Montrer qu'ils arrivent en N avec $m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2 = m_3 v_3^2$.

Les ions pénètrent ensuite dans un sélecteur de vitesse limité par les plaques P_N et P_O. Ils sont alors soumis à l'action simultanée de deux champs : un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\vec{e}_y$, et un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$.

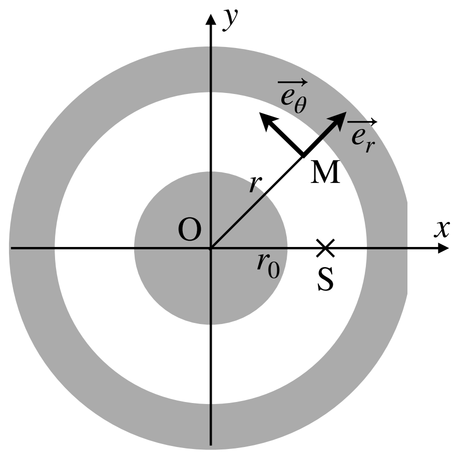
2. Le champ $\overrightarrow{B}$ est créé de sorte que les ions ${}^4_2He^+$ aient un mouvement rectiligne jusqu'en O. Quelles contraintes sur $\overrightarrow{B}$ cela implique-t-il ? Quelle direction donne un champ magnétique d'intensité minimale ?
3. Comment seront déviés les ions ${}^3_2He^+$ et ${}^6_2He^+$? On se contentera de donner l'allure des trajectoires sans préciser leur nature et sans faire de calcul.

EXERCICE 7 : Mouvement dans un condensateur circulaire (⋆⋆⋆)

Un électron de masse m et de charge $-e$ est émis avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ entre les deux armatures d'un condensateur cylindrique.
On considère que le mouvement se fait dans le plan xOy et on travaille en coordonnées polaires (r,θ), avec la base polaire de vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.
Le champ électrique qui règne entre les deux armatures est de la forme :

$$\vec{E}(r) = E_0 \frac{r_0}{r} \vec{e}_r$$

Le champ magnétique y est nul. À $t = 0$, l'électron est en S, sur l'axe Ox, à la distance r_0 du centre. À la date t, l'électron est en M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.



1. En négligeant le poids, écrire les équations différentielles du mouvement de l'électron dans le plan xOy.

2. Dans le cas d'une trajectoire circulaire (rayon r_0), montrer que $v_0 = \sqrt{\frac{eE_0 r_0}{m}}$

3. Quelle est alors la période de révolution T de l'électron ?

On note $\omega_0 = 2\pi/T$ et $\omega = \dot{\theta}$. On considère alors le cas d'une petite perturbation pour le mouvement circulaire. On introduit alors les grandeurs

$$r = r_0(1+\alpha) \text{ et } \omega = \omega_0(1+\beta)$$

avec $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll 1$ et avec les conditions initiales $\alpha(0) = \alpha_0$ puis $\beta(0) = 0$.

4. Démontrer que l'on obtient

$$\ddot{\alpha} + 2\omega_0^2 \alpha = 4\omega_0^2 \alpha_0$$

en négligeant tous les termes infiniment petits d'ordre deux ou plus à partir de l'équation obtenue à la question **1.**.