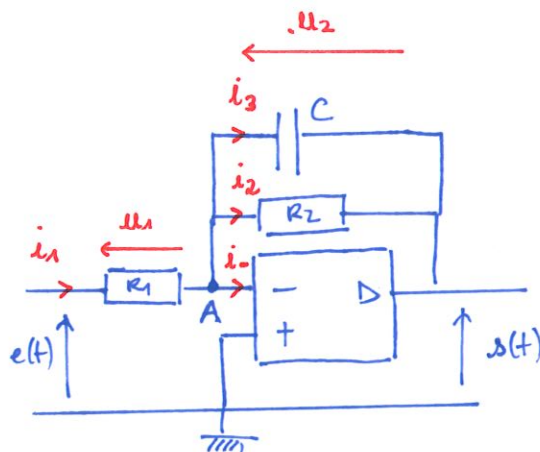


TD 15 Correction

Exercice 1

1. La présence d'une rétroaction négative permet de supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.



2. Pour trouver la fonction de transfert, il faut exprimer $s(t)$ en fonction de $e(t)$.
On se place en RSF (notation complexe).

* loi des nœuds en A : $\underline{i_1} = \underline{i_2} + \underline{i_3} + \underline{i_-}$

or on suppose l'ALI comme idéal, donc $\underline{i_-} = 0$.

* expression des courants en fonction des potentiels :

$$\begin{cases} \underline{i_1} = \frac{\underline{u_1}}{R_1} = \frac{\underline{e} - \underline{V_A}}{R_1} \\ \underline{i_2} = \frac{\underline{u_2}}{R_2} = \frac{\underline{V_A} - \underline{s}}{R_2} \\ \underline{i_3} = \frac{\underline{u_2}}{1/j\omega} = \frac{\underline{V_A} - \underline{s}}{1/j\omega} = j\omega(\underline{V_A} - \underline{s}) \end{cases}$$

R_f : On aurait pu remplacer R_2 et C par une impédance équivalente.

* Réexprimer la loi des nœuds

Comme le régime est linéaire pour l'ALI : $\underline{V_+} = \underline{V_-}$
et $\underline{V_+} = 0$ donc $\underline{V_A} = 0$

D'où $\frac{\underline{e}}{R_1} = -\frac{\underline{s}}{R_2} - j\omega \underline{s} = -\underline{s} \left(\frac{1 + j\omega R_2}{R_2} \right)$

et alors $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{\Delta}}{\underline{e}} = - \frac{R_2/R_1}{1+jR_2C\omega}$

C'est un filtre passe-bas.

3. Comme $\frac{\underline{\Delta}}{\underline{e}} = - \frac{R_2/R_1}{1+jR_2C\omega} \Leftrightarrow (1+jR_2C\omega)\underline{\Delta} = - \frac{R_2}{R_1}\underline{e}$
 $\Leftrightarrow \underline{\Delta} + R_2C \cdot j\omega \underline{\Delta} = - \frac{R_2}{R_1}\underline{e}$

Or les multiplications par $j\omega$ sont équivalentes à des dérivées temporelles des signaux réels, d'où :

$s(t) + R_2C \cdot \frac{ds}{dt} = - \frac{R_2}{R_1}e(t) \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} + \frac{1}{R_2C}s(t) = - \frac{1}{R_1C}e(t)$

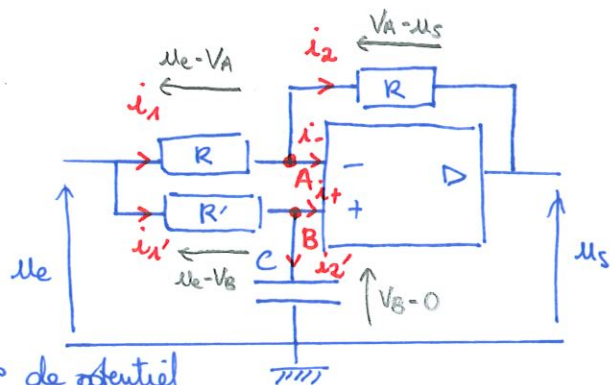
4. On remarque que le module de la fonction de transfert à basses fréquences s'exprime : $|\underline{H}(j\omega)| \approx \frac{R_2}{R_1}$

En choisissant $\frac{R_2}{R_1} > 1$, il est possible d'amplifier le signal d'entrée (et d'avoir un gain positif). Cela est possible grâce à la présence de l'ALI qui est un composant actif.

Exercice 2

* Détermination de la fonction de transfert :

→ loi des nœuds en A + exprimer en termes de potentiel



$i_1 = i_2 + i_- = i_2$ car $i_- = 0$ (modèle de l'ALI idéal)

Or $i_1 = \frac{u_e - V_A}{R}$ et $i_2 = \frac{V_A - u_s}{R} \Rightarrow \underline{u_e} = 2\underline{V_A} - \underline{u_s} \quad (*)$

→ loi des nœuds en B + exprimer en termes de potentiel

$$\underline{i_1'} = \underline{i_+} + \underline{i_2'} = \underline{i_2'} \quad \text{car } \underline{i_+} = 0 \quad (\text{modèle de l'ALI idéal})$$

$$\text{Or } \underline{i_1'} = \frac{\underline{u_e} - \underline{V_B}}{R'} \quad \text{et } \underline{i_2'} = \frac{\underline{V_B} - 0}{1/j\omega C}$$

on aurait pu appliquer un pont diviseur de tensions:
R' et C sont parcourus par le même courant, donc

$$\text{D'où: } \frac{\underline{u_e} - \underline{V_B}}{R'} = \frac{\underline{V_B}}{1/j\omega C} \Rightarrow \underline{u_e} = \underline{V_B} (1 + j\omega R'C) \quad (**)$$

$$\underline{V_B} - 0 = \frac{Z_C}{Z_C + R'} \underline{u_e}$$

→ conclusion:
$$\begin{cases} \underline{u_e} = 2\underline{V_A} - \underline{u_s} \\ \underline{u_e} = \underline{V_B} (1 + j\omega R'C) \end{cases}$$

or $\underline{V_A} = \underline{V_B}$ car $V_+ = V_-$ d'après le fonctionnement en régime linéaire.

$$\text{ainsi } \underline{u_e} = \frac{\underline{u_e} + \underline{u_s}}{2} (1 + j\omega R'C) \Rightarrow \underline{u_e} (1 - j\omega R'C) = \underline{u_s} (1 + j\omega R'C)$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1 - j\omega R'C}{1 + j\omega R'C} = \frac{1 - jx}{1 + jx}$$

$$\text{où } x = \omega R'C$$

* Expression du gain

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20 \log\left(\frac{|1 - jx|}{|1 + jx|}\right) = 20 \log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= 20 \log(1) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \underline{G_{dB} = 0 \quad \forall \omega}$$

Le filtre ne modifie pas l'amplitude du signal.

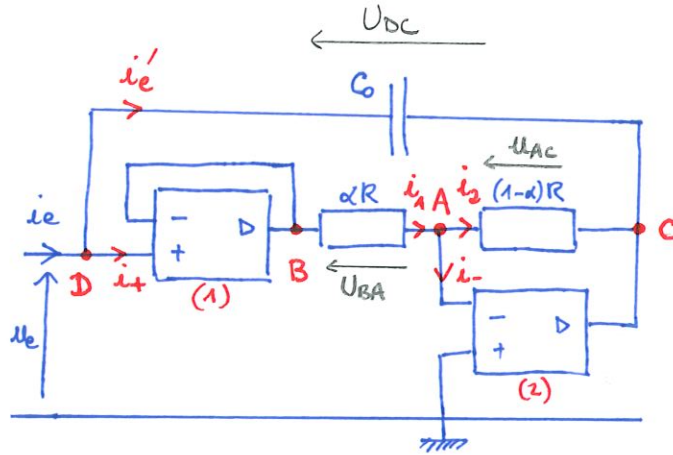
* Expression du déphasage

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \text{Arg}(1 - jx) - \text{Arg}(1 + jx) \\ &= \text{Arctan}(-x) - \text{Arctan}(x) = \underline{-2 \text{Arctan}(x)} \end{aligned}$$

Ce circuit permet de déphaser le signal de sortie par rapport au signal d'entrée.
(sans modifier l'amplitude).

Exercice 3

Présence de rétroactions
négatives pour les deux ALI
⇒ fonctionne en régime linéaire



* Loi des nœuds en A

$$i_1 = i_2 + i_- = i_2 \text{ car } i_- = 0 \text{ (ALI idéal)}$$

* Expression des courants en fonction des potentiels

$$i_1 = \frac{U_{BA}}{\alpha R} = \frac{V_B - V_A}{\alpha R}$$

$$i_2 = \frac{U_{AC}}{(1-\alpha)R} = \frac{V_A - V_C}{(1-\alpha)R}$$

$$\text{D'où : } \frac{V_B - V_A}{\alpha R} = \frac{V_A - V_C}{(1-\alpha)R} \quad (*)$$

* Exploitation du fonctionnement en régime linéaire

$$\text{Comme } V_B = \underbrace{V_-^{(1)} = V_+^{(1)}}_{\substack{\text{régime linéaire} \\ \text{de l'ALI (1)}}} = u_e$$

$$V_A = \underbrace{V_-^{(2)} = V_+^{(2)}}_{\substack{\text{régime linéaire} \\ \text{de l'ALI (2)}}} = 0$$

$$\text{Donc } (*) \text{ devient } \underline{\underline{\frac{u_e}{\alpha R} = -\frac{V_C}{(1-\alpha)R}}} \quad (**)$$

* Relier V_C à u_e

En se plaçant en RSF, et remarquant que la loi des nœuds en D donne $\underline{i_e'} = \underline{i_e}$
(car $i_+ = 0$ car l'ALI est idéal)

On obtient $\underline{i_e'} = \underline{i_e} = \frac{\underline{U_{Dc}}}{\frac{1}{j\omega C_0}} = j\omega C_0 (\underline{V_D} - \underline{V_C})$

or $\underline{V_D} = \underline{U_e}$, d'où : $\underline{i_e} = j\omega C_0 (\underline{U_e} - \underline{V_C})$

Alors la relation (**), on obtient :

$$\underline{i_e} = j\omega C_0 \left(\underline{U_e} + \frac{(1-\alpha)R}{\alpha R} \underline{U_e} \right) = j\omega C_0 \left(\frac{\alpha + 1 - \alpha}{\alpha} \right) \underline{U_e}$$

$$\Rightarrow \underline{i_e} = j \frac{C_0}{\alpha} \omega \underline{U_e} \Leftrightarrow \underline{U_e} = \frac{1}{j C_{eq} \omega} \underline{i_e} \quad \text{où } \underline{C_{eq}} = \frac{C_0}{\alpha}$$

En faisant varier le potentiomètre, il est possible de modifier la capacité équivalente de ce montage. Ce montage sert donc de capacité variable.

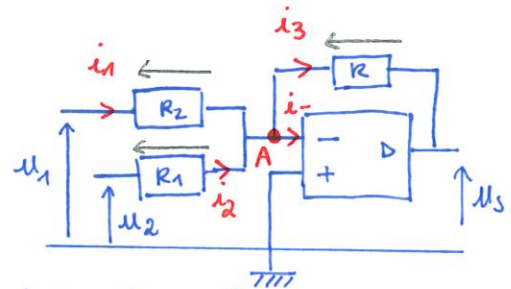
Exercice 4

Montage 1

Présence d'une rétroaction négative

$\Rightarrow$ fonctionnement de l'ALI en régime linéaire
a priori

Donc $V_+ = V_- = 0$ (car la borne non-inverseuse est liée à la masse)



* loi des nœuds en A

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_- = i_3 \quad \text{car } i_- = 0 \text{ (modèle de l'ALI idéal)}$$

* expression des courants en terme de potentiel

$$i_1 = \frac{U_1 - V_A}{R_2}$$

$$\text{or } V_A = V_- = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{\frac{U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_1} = - \frac{U_3}{R}}$$

$$i_2 = \frac{U_2 - V_A}{R_1}$$

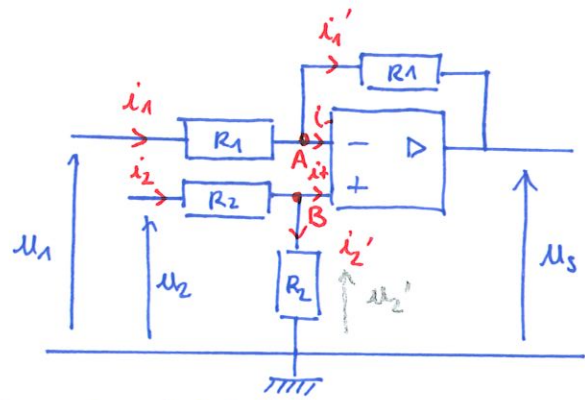
$$i_3 = \frac{V_A - U_3}{R}$$

$$\text{Ainsi } \underline{U_3 = -R \left(\frac{U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_1} \right)} \quad \text{C'est le montage } \underline{\text{sommateur}}$$

Montage 2

Présence d'une rétroaction négative
⇒ fonctionnement en régime linéaire a priori

$$\text{Donc } V_+ = V_-$$



* loi des nœuds en A + exprimer les courants en terme de potentiel

$$i_1 = i_1' + i_- = i_1' \quad (\text{car } i_- = 0, \text{ modèle de l'ALI idéal})$$

$$\text{or } i_1 = \frac{u_1 - V_A}{R_1} \quad \text{et} \quad i_1' = \frac{V_A - u_S}{R_1}$$

$$\text{D'où } \underline{u_1 = 2V_A - u_S}$$

* loi des nœuds en B + exprimer les courants en terme de potentiel (*)

$$i_2 = i_2' + i_+ = i_2' \quad \text{car } i_+ = 0 \quad (\text{modèle de l'ALI idéal})$$

$$\text{or } i_2 = \frac{u_2 - V_B}{R_2}, \quad i_2' = \frac{V_B - 0}{R_2}$$

$$\text{D'où } \underline{u_2 = 2V_B}$$

$$\text{Or } V_A = V_- \text{ et } V_B = V_+ \text{ et } V_+ = V_- \text{ (par fonctionnement en régime linéaire)}$$

Finalement on trouve:

$$\underline{u_S = u_2 - u_1}$$

C'est le montage soustracteur.

(*) On aurait pu appliquer également le pont diviseur de tension:

Les deux R_2 sont parcourus par le même courant:

$$u_2' = \frac{R_2}{R_2 + R_2} u_2 \Rightarrow u_2' = \frac{u_2}{2}$$