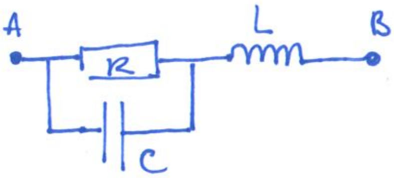
Correction TD13

Exercice 1



$\Longleftrightarrow$

où $\underline{Z}_{eq}^{(1)}$ impédance équivalente de R et C en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}^{(1)}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/jC\omega} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z}_{eq}^{(1)} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

et

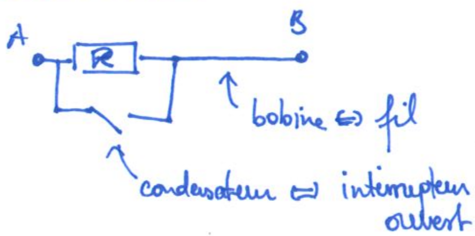
$\Longleftrightarrow$

où $\underline{Z}_{eq}$ équivalente à L et $\underline{Z}_{eq}^{(1)}$ en série :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1+jRC\omega} + jL\omega = \underline{\frac{R + jL\omega - RCL\omega^2}{1+jRC\omega}}$$

À basses fréquences :

pour $\omega \to 0$, $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{R}{1} = \underline{R}$ c'est cohérent avec le schéma :



À hautes fréquences :

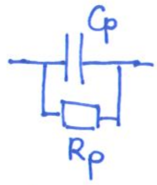
pour $\omega \to \infty$, $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{-RCL\omega^2}{jRC\omega} = \underline{jL\omega}$

équivalent à une bobine seule.

Rq : lors des études asymptotiques : si la fonction est sous la forme de fraction rationnelle en $j\omega$, on garde $\begin{cases} \text{soit le terme de plus faible puissance en } j\omega \text{ en limite BF} \\ \text{soit ——— grande puissance en } j\omega \text{ en limite HF.} \end{cases}$

Exercice 2

Schéma d'un condensateur réel :



1. R_p et C_p sont en parallèle : $\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \dfrac{1}{R_p} + \dfrac{1}{1/jC_p\omega} = \dfrac{1}{R_p} + jC_p\omega$

d'où $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{R_p}{1 + jR_pC_p\omega}$

2. On cherche R_s et C_s afin de trouver :

Déterminons $\underline{Z'_{eq}}$ de l'association en série C_s et R_s

$$\underline{Z'_{eq}} = R_s + \frac{1}{jC_s\omega}$$

Or on veut $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z'_{eq}} \iff R_s + \dfrac{1}{jC_s\omega} = \dfrac{R_p}{1 + jR_pC_p\omega}$

$$\iff R_s - j\frac{1}{C_s\omega} = \frac{R_p(1 - jR_pC_p\omega)}{(1 + (R_pC_p\omega)^2)}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on trouve :

$$\begin{cases} R_s = \dfrac{R_p}{1 + R_p^2C_p^2\omega^2} \\[2ex] \dfrac{1}{C_s\omega} = \dfrac{R_p^2C_p\omega}{1 + R_p^2C_p^2\omega^2} \iff C_s = \dfrac{1 + R_p^2C_p^2\omega^2}{R_p^2C_p\omega^2} \end{cases}$$

3. Si $R_pC_p\omega \gg 1$

alors $R_s = \dfrac{R_p}{1 + R_p^2C_p^2\omega^2} \approx \dfrac{R_p}{R_p^2C_p^2\omega^2} = \dfrac{1}{R_pC_p^2\omega^2}$

et $C_s = \dfrac{1 + R_p^2 C_p^2 \omega^2}{R_p^2 C_p \omega^2} \approx \dfrac{R_p^2 C_p^2 \omega^2}{R_p^2 C_p \omega^2} = C_p$

Ainsi $\begin{cases} \underline{C_p = C_s} \\ \underline{R_p = \dfrac{1}{R_s C_s^2 \omega}} \end{cases}$

4. AN : $C_s = 1\,\mu F$ à $1\,kHz$

$R_s = 2{,}5 \times 10^{-2}\,\Omega$

En utilisant les expressions de la question 3 :

$$\underline{C_p = C_s = 1\,\mu F}$$

$$R_p = \frac{1}{2{,}5 \times 10^{-2} \times (1e^{-6})^2 \times 2\pi \times 1 \times 10^3} \simeq \underline{6{,}4 \times 10^9\,\Omega}$$

Vérifions que l'on avait bien $R_p C_p \omega \gg 1$:

$$R_p C_p \omega = 1 \times 10^{-6} \times 6{,}4 \times 10^9 \times 2\pi \times 1 \times 10^3 \simeq 4 \times 10^7 \gg 1$$

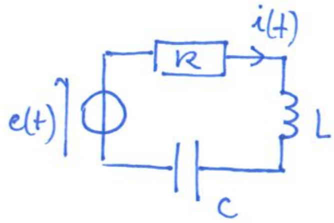
on a bien $\underline{R_p C_p \omega \gg 1}$

Exercice 3

1. a) L'impédance équivalente est donnée par la somme des impédances en série :

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$



Et donc $Z(\omega) = |\underline{Z}| = \left|R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right|$

$$= \underline{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

b) Il y a résonance en intensité dans le circuit si l'amplitude de l'intensité est maximale. Or si l'on note E_0 l'amplitude de la tension imposée et

I_m l'amplitude de l'intensité, on trouve :

$$I_m = \frac{E_0}{Z(\omega)} \qquad \left(\text{car } \underline{I_m} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} \Rightarrow |\underline{I_m}| = I_m = \frac{E}{|\underline{Z}|} \right)$$

Ainsi il y a résonance en intensité si $Z(\omega)$ admet un minimum.

Or la fonction $f(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ admet un minimum lorsque $f'(\omega) = 0$.

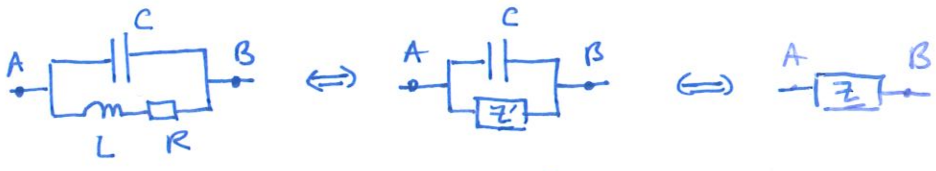
Or $f'(\omega) = 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)$

$$f'(\omega) = 0 \iff L\omega = \frac{1}{C\omega}$$
$$\iff \omega^2 = \frac{1}{LC}$$
$$\iff \omega = \omega_0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

c) À la résonance ($\omega = \omega_0$), l'impédance s'écrit :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)$$
$$= R + j\left(\sqrt{\frac{L}{C}} - \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

$\Rightarrow \underline{Z} = R \in \mathbb{R}$ Ainsi, comme l'argument de $\underline{Z}$ donne le déphasage entre $i(t)$ et $e(t)$, on trouve que le déphasage est donc nul à la résonance.

2. a) 

. L et R sont en série : $\underline{Z}' = R + jL\omega$

. $\underline{Z}'$ et C sont en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}'} + \frac{1}{1/jC\omega} \iff \underline{Z} = \frac{\underline{Z}'}{1 + jC\omega \underline{Z}'}$

$$= \frac{R + jL\omega}{1 + jC\omega(R + jL\omega)}$$

Donc $\underline{Z} = \dfrac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

et $Z(\omega)^2 = |\underline{Z}(\omega)|^2 = \dfrac{|R + jL\omega|^2}{|1 + jRC\omega - LC\omega^2|^2}$

$$\Rightarrow \quad Z(\omega)^2 = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

b) Avec $R = 10\,\Omega$, $L = 10\,mH$, $C = 1{,}0\,nF$, on trouve $\dfrac{R^2C}{L} = \dfrac{10^2 \times 1{,}0 \times 10^{-9}}{10.10^{-3}} = 10^{-5} \ll 1$

Or $\omega_0'^2 = \omega_0^2 \left(\sqrt{1 + \dfrac{2R^2C}{L}} - \dfrac{R^2C}{L} \right)$ où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (d'après l'énoncé)

$$\simeq \omega_0^2 \left(1 + \frac{R^2C}{L} - \frac{1}{8}\left(\frac{2R^2C}{L}\right)^2 - \frac{R^2C}{L} \right)$$

$\uparrow$

car $\dfrac{R^2C}{L} \ll 1$ et $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon^2}{8}$

D'où $\omega_0'^2 = \omega_0^2 \left(1 - \dfrac{R^4C^2}{2L^2} \right)$

$$\Rightarrow \quad \omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^4C^2}{2L^2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^4C^2}{2L^2} \right)$$

$\uparrow$

on effectue de nouveau le développement car $\dfrac{R^4C^2}{L^2} \ll 1$

Finalement : $\omega_0' = \omega_0 \left(1 - f(R,L,C) \right)$ où $f(R,L,C) = \dfrac{R^4C^2}{4L^2}$

c) A.N : $f(R,L,C) = \dfrac{10^4 \times (1{,}0 \times 10^{-9})^2}{4\,(10^{-2})^2} = 2{,}5 \times 10^{-11}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}0 \times 10^{-9} \times 10^{-3} \times 10}} \simeq 3{,}2 \times 10^5\ rad.s^{-1}$$

d) Pour $\omega \to 0$: $Z^2(\omega) \simeq \dfrac{R^2}{1} \Rightarrow \underline{Z(\omega) \xrightarrow[\omega \to 0]{} R}$

Pour $\omega \to \infty$: $Z^2(\omega) \simeq \dfrac{L^2\omega^2}{L^2C^2\omega^4} = \dfrac{1}{C^2\omega^2} \Rightarrow \underline{Z(\omega) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0}$

Or d'après l'énoncé, $Z(\omega)$ passe par un extremum en ω_0', il s'agit donc d'un maximum.

$$Z^2(\omega_0') \simeq Z^2(\omega_0) = \frac{R^2 + L^2 \cdot \frac{1}{LC}}{(1 - LC \cdot \frac{1}{LC})^2 + R^2C^2 \cdot \frac{1}{LC}}$$

$$= \frac{R^2 + L/C}{R^2C/L}$$

$$= \frac{L}{C} \cdot \frac{1 + R^2C/L}{R^2C/L}$$

$$= \frac{L^2}{R^2C^2}\left(1 + \frac{R^2C}{L}\right)$$

Or $\dfrac{R^2C}{L} \ll 1$, d'où $Z^2(\omega_0') \approx \dfrac{L^2}{R^2C^2}$

$$\Rightarrow \underline{Z(\omega_0') \simeq \frac{L}{RC}}$$

Si l'on s'intéresse au courant, l'amplitude de l'intensité s'écrit :

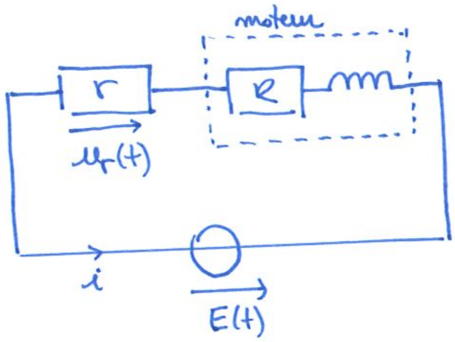
$I_m = \dfrac{E_0}{Z(\omega)}$ or en ω_0' $Z(\omega)$ est maximal, donc I_m est minimal. Il s'agit d'une <u>anti-résonance</u> (on observe une <u>forte atténuation</u> pour cette pulsation).

Exercice 4

1. On passe en notation complexe : $E(t) = E\cos(\omega t) \longrightarrow \underline{E}(t) = E e^{j\omega t}$

$u_r(t) = U\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{u_r}(t) = U e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

Avec un pont diviseur de tension, on trouve :



$$\underline{u_r} = \frac{r}{r + R + jL\omega}\,\underline{E}$$

$$\Rightarrow U e^{j\varphi} = \frac{rE}{r + R + jL\omega}$$

Ainsi $U = |U e^{j\varphi}| = \left|\frac{rE}{r+R+jL\omega}\right| = \frac{rE}{\sqrt{(r+R)^2 + (L\omega)^2}}$

et $\varphi = \mathrm{Arg}(U e^{j\varphi}) = \mathrm{Arg}(rE) - \mathrm{Arg}(r + R + jL\omega)$

$= 0 - \mathrm{Arctan}\left(\frac{L\omega}{r+R}\right)$

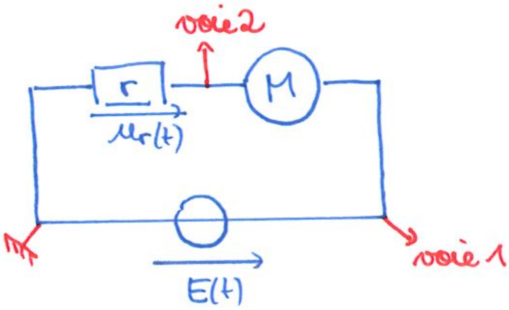
car $r+R > 0$, donc $\mathrm{Arg}(r+R+jL\omega) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on peut utiliser directement la fonction arctan.

<u>A.N:</u> $U = \frac{15 \times 5}{\sqrt{(15+9,6)^2 + (45\times 10^{-3} \times \underbrace{2\times\pi\times 50}_{\text{car } \omega = 2\pi\nu})^2}} \simeq 2,64\,V$

$$\varphi = -\mathrm{Arctan}\left(\frac{45\times10^{-3}\times 2\pi\times 50}{15 + 9,6}\right) \simeq -29,9°$$

2. Comme $\varphi < 0$ et φ est ici le déphasage de u_r par rapport à $E(t)$, donc $u_r(t)$ est en retard sur $E(t)$.

3.



La masse est positionnée entre la source et la résistance r.

4. Représentation de $u_r(t)$:

→ l'amplitude $U = 2{,}64\,V$. Or l'échelle est de $1\,V/div$, donc l'amplitude sera de <u>2,64 carreaux</u>.

→ la phase est de $-29{,}9°$. Or déphasage et retard temporel sont proportionnels.

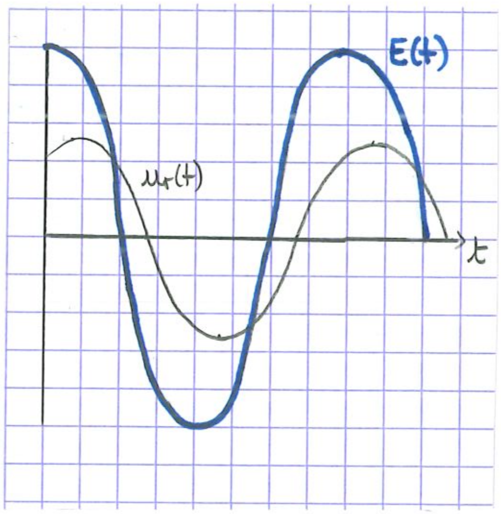
$$\varphi \longleftrightarrow \tau$$

car φ en degrés → $360° \longleftrightarrow T$ la période

par une règle de trois, $\tau = \frac{\varphi}{360°} \times T = \frac{\varphi}{360°} \times \frac{1}{\nu}$

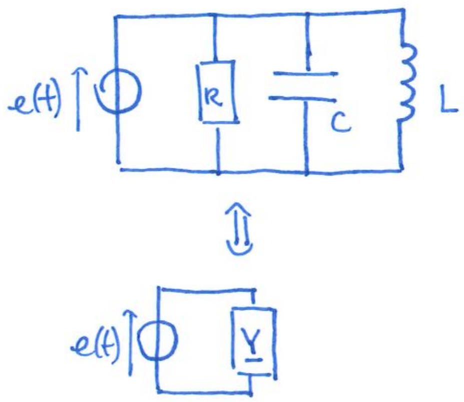
$$\underline{AN}: \tau = \frac{-29{,}9}{360} \times \frac{1}{50} \simeq \underline{-1{,}7\,ms}$$

Or la base de temps est de $2{,}5\,ms/div$, donc le retard sera de <u>0,68 carreaux</u>.



<u>Exercice 5</u>

1. R, L et C sont en parallèle,



donc : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{1/jC\omega}$

Or $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

D'où $\underline{\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega}$

2. $\underline{Y} = \dfrac{jL\omega + R}{jRL\omega} + jC\omega$

$$= \frac{R + jL\omega - RCL\omega^2}{jRL\omega}$$

Pour exprimer en fonction de R, Q et ω_0, on peut adopter deux approches :

* Méthode 1 : comme $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

on trouve que $Q\omega_0 = \dfrac{R}{L}$ et $\dfrac{Q}{\omega_0} = RC$

d'où $L = \dfrac{R}{Q\omega_0}$ et $C = \dfrac{Q}{R\omega_0}$

on peut alors remplacer dans l'expression de $\underline{Y}$ pour faire apparaître uniquement Q, ω_0 et R (ou Q, x et R avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$)

* Méthode 2 : on sait que dans les formes canoniques, ω apparaît toujours avec ω_0 sous la forme ω/ω_0 (ou ω_0/ω).

Ainsi, on peut faire apparaître les ω_0 :

$$\underline{Y} = \frac{R + jL\omega - RCL\omega^2}{jRL\omega} = \frac{R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \times \sqrt{LC}\,\omega - R \times LC\omega^2}{jR\sqrt{\frac{L}{C}} \times \sqrt{LC}\,\omega}$$

$$= \frac{R + j\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - R\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{jR\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Enfin, on voit apparaître le rapport $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ caractéristique de Q :

$$\underline{Y} = \frac{R\left(1 + j\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{R^2 \times j\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{R} \times \frac{1 + jx/Q - x^2}{jx/Q} \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

3. Ainsi $\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} = R \dfrac{j^{x}/_{Q}}{1+j^{x}/_{Q}-x^2}$

$$|\underline{Z}| = |R| \cdot \left| \frac{j^{x}/_{Q}}{1+j^{x}/_{Q}-x^2} \right| = R \cdot \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Pour étudier les variations de $|\underline{Z}|$, on dérive par rapport à x :

$$\frac{d|\underline{Z}|}{dx} = \frac{\frac{R}{Q}\left[\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2} - x \cdot \frac{2(1-x^2)\times(-2x) + \frac{2x}{Q^2}}{2\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}\right]}{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}$$

$$= \frac{R}{Q} \frac{2\left[(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2\right] - x\times\left(2(1-x^2)(-2x)+\frac{2x}{Q^2}\right)}{2\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}\times\left[(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2\right]}$$

Le signe de $\dfrac{d|\underline{Z}|}{dx}$ ne dépend que du signe du numérateur $f(x)$:

$$f(x) = 2\left((1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2\right) - x\left(-4x(1-x^2)+\frac{2x}{Q^2}\right)$$

$$= 2(1-x^2)^2 + 4x^2(1-x^2)$$

$$= (1-x^2)\left(2(1-x^2)+4x^2\right)$$

$$= 2(1-x^2)(1+x^2)$$

Ainsi $f(x) < 0$ pour $x > 1$ (donc $\omega > \omega_0$)

$f(x) > 0$ pour $x < 1$ (donc $\omega < \omega_0$

Ainsi $|\underline{Z}|$ croît jusqu'à atteindre un maximum en $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$ puis décroît au-delà.

En $\omega = \omega_0$, $|\underline{Z}| = R$

Cherchons x_1 et x_2 tels que $|\underline{Z}| = \dfrac{|\underline{Z}|_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Donc $$R\frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x^2}{Q^2} = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{Q^2} = (1-x^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \pm\frac{x}{Q} = (1-x^2)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Les solutions sont $$x = \frac{\pm\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$$

$$= \frac{1}{2Q}\left(\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right)$$

Comme on cherche $x > 0$, les solutions à garder sont :

$$\begin{cases} \underline{x_1 = \dfrac{1}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right)} \\ \underline{x_2 = \dfrac{1}{2Q}\left(1+\sqrt{1+4Q^2}\right)} \end{cases}$$

4. $$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right) - \left(\frac{1}{2Q}\left(1+\sqrt{1+4Q^2}\right)\right)\right|$$

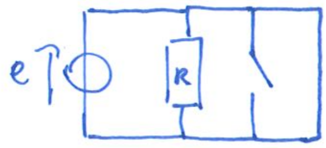
$$\underline{|x_1 - x_2| = \frac{1}{Q}}$$

D'où $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{\underline{Z} = R}$

5. À basses fréquences : $\begin{cases} C \text{ est équivalent à interrupteur ouvert} \\ L \text{ est équivalent à un fil} \end{cases}$

d'où le schéma équivalent :



L'impédance est <u>nulle</u> (présence du fil)

À haute fréquence : $\begin{cases} C \text{ est équivalent à un fil} \\ L \text{ est équivalent à un interrupteur ouvert} \end{cases}$

on retrouve le même résultat.

On retrouve le même résultat par le calcul :

$\rightarrow$ à BF : $(x \ll 1)$ $\quad \underline{Z} = R \cdot \dfrac{j^{x}/_{Q}}{1 + j^{x}/_{Q} - x^2} \simeq R \cdot \dfrac{j^{x}/_{Q}}{1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\rightarrow$ à HF : $(x \gg 1)$ $\quad \underline{Z} \simeq R \cdot \dfrac{j^{x}/_{Q}}{-x^2} = -Rj \cdot \dfrac{1}{xQ} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

<u>Exercice 6</u>

1. On définit les grandeurs complexes suivantes :

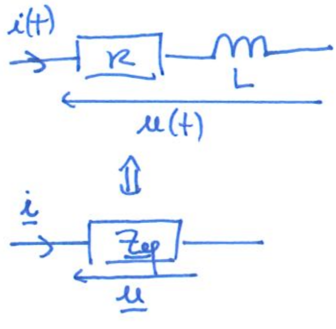
$u(t) = U\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \longrightarrow \underline{u}(t) = Ue^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega t} = \underline{U}e^{j\omega t}$

$i(t) = I\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \underline{i}(t) = Ie^{j\phi}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$

$i'(t) = I'\cos(\omega t + \phi') \longrightarrow \underline{i}'(t) = I'e^{j\phi'}e^{j\omega t} = \underline{I}'e^{j\omega t}$

2. Le courant $i(t)$ parcourt R et L en série.

On peut déterminer l'impédance équivalente :



$\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega$

Ainsi $\underline{u} = \underline{Z_{eq}}\,\underline{i} \Rightarrow \underline{U} = (R + jL\omega)\,\underline{I}$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega}$$

donc $I = |\underline{I}| = \dfrac{|\underline{U}|}{|R + jL\omega|} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

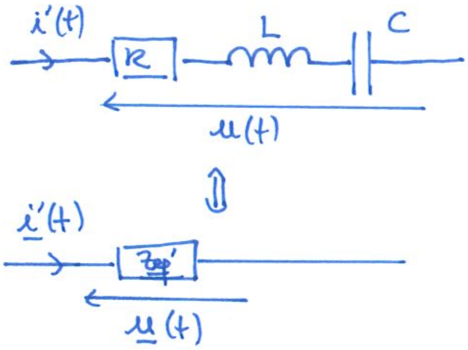
et $\phi = \mathrm{Arg}(\underline{I}) = \mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(R + jL\omega)$

Comme $\mathrm{Re}(R + jL\omega) > 0$, on peut directement utiliser arctan.

$$= \frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Or arctan : $\mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{L\omega}{R} > 0 \Rightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\phi \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$



3. Par un raisonnement similaire à la question précédente, on associe en série R, L et C, d'où l'impédance équivalente :

$$\underline{Z_{eq}}' = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

$$= R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Ainsi $\underline{u} = \underline{Z_{eq}}'\,\underline{i}' \Rightarrow \underline{U} = \underline{Z_{eq}}'\,\underline{I}'$

$$\Rightarrow \underline{I}' = \frac{\underline{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

donc $I' = |\underline{I}'| = \dfrac{|\underline{U}|}{\left|R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right|} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

et $\phi' = Arg(\underline{I}') = Arg(\underline{U}) - Arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$

$$= \underline{\frac{\pi}{4} - Arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)}$$

car $Re\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) > 0$

Comme $Arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ peut être positif ou négatif.

alors : $\underline{\phi' \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[}$

4. Par définition, $\psi = \phi - \frac{\pi}{4}$ et $\psi' = \phi' - \frac{\pi}{4}$

$$\psi = -Arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) \qquad \psi' = -Arctan\left(\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

Or $\psi = -\psi' \Leftrightarrow -Arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = Arctan\left(\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$

$$\Rightarrow Arctan\left(-\frac{L\omega}{R}\right) = Arctan\left(\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

car arctan est une fonction impaire.

$$\Rightarrow -\frac{L\omega}{R} = \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \text{(car Arctan bijective)}$$

$$\Rightarrow \underline{2L\omega = \frac{1}{C\omega}}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega^2 = \frac{1}{2LC}}$$

5. On souhaite avoir $\phi' - \phi = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow Arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) - Arctan\left(\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) + Arctan\left(\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Pour satisfaire cette égalité, il faut :

$$\left(\frac{L\omega}{R}\right)^{-1} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L\omega}{R^2}\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{L}{C} - L^2\omega^2 - R^2 = 0}$$

6. Comme $\begin{cases} R^2 + L^2\omega^2 = \dfrac{L}{C} \\ \omega^2 = \dfrac{1}{2LC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 + L^2\omega^2 = \dfrac{L}{C} \\ \omega^2 \times 2L^2 = \dfrac{L}{C} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = L^2\omega^2 \\ 2\omega^2 L^2 = \dfrac{L}{C} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = L^2\omega^2 \\ 2\omega L = \dfrac{1}{C\omega} \end{cases}$$

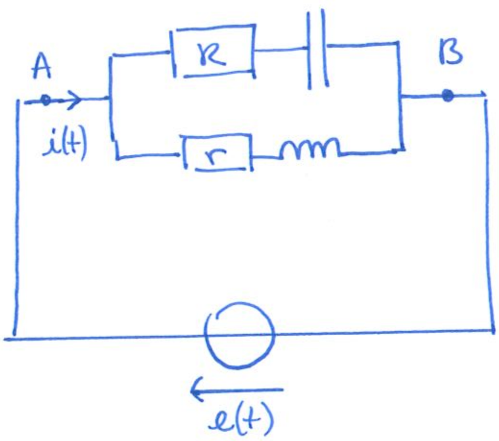
ainsi $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{2R^2}} = \underline{\dfrac{U}{\sqrt{2}\,R}}$

$$I' = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 2\omega L)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \underline{\frac{U}{\sqrt{2}\,R}}$$

De plus on a alors $\begin{cases} \psi = -\psi' \\ \phi' - \phi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi - \dfrac{\pi}{4} = -\phi' + \dfrac{\pi}{4} \\ \phi' - \phi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi' + \phi = \dfrac{\pi}{2} \\ \phi' - \phi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\phi' = \dfrac{\pi}{2}} \\ \underline{\phi = 0} \end{cases}$$

Exercice 7



Déterminons l'impédance complexe équivalente au dipôle AB :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}} + \frac{1}{r+jL\omega}$$

$$= \frac{jC\omega}{1+jRC\omega} + \frac{1}{r+jL\omega}$$

$$= \frac{jrC\omega - LC\omega^2 + 1 + jRC\omega}{(1+jRC\omega)(r+jL\omega)}$$

D'où $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{(1+jRC\omega)(r+jL\omega)}{1+j(r+R)C\omega - LC\omega^2}$

$$= \frac{r - RLC\omega^2 + jrRC\omega + jL\omega}{(1-LC\omega^2)+j(r+R)C\omega}$$

$$= \frac{\left[r-RLC\omega^2 + j(rRC\omega + L\omega)\right]\times\left[(1-LC\omega^2) - j(r+R)C\omega\right]}{(1-LC\omega^2)^2 + ((r+R)C\omega)^2}$$

$$= \frac{(r-RLC\omega^2)(1-LC\omega^2) + (rRC\omega+L\omega)(r+R)C\omega + j(rRC\omega+L\omega)(1-LC\omega^2) - j(r+R)C\omega(r-RLC\omega^2)}{(1-LC\omega^2)^2 + ((r+R)C\omega)^2}$$

On veut $\underline{Z}_{eq} \in \mathbb{R}$ donc que $\mathrm{Im}(\underline{Z}_{eq}) = 0$

Cela impose : $(rRC\omega + L\omega)(1-LC\omega^2) - (r+R)C\omega(r-RLC\omega^2) = 0$

$\Rightarrow \cancel{rRC\omega} - \cancel{rRLC^2\omega^3} + L\omega - L^2C\omega^3 - r^2C\omega - \cancel{rRC\omega} + \cancel{rRLC^2\omega^3} + R^2LC^2\omega^3 = 0$

Finalement : $\omega\left(L - L^2C\omega^2 - r^2C + R^2LC^2\omega^2\right) = 0$

* soit $\underline{\omega = 0}$
* soit $L - r^2C - \omega^2\left(L^2C - R^2LC^2\right) = 0$

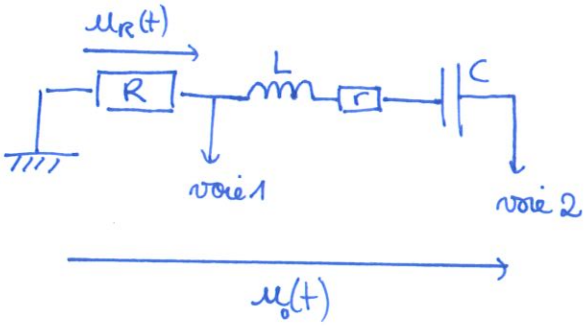
$$\Leftrightarrow \quad L - r^2C = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(L - R^2C\right) \qquad \text{où } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\omega = \omega_0\sqrt{\frac{L - r^2C}{L - R^2C}}}$$

Cette solution est définie si $\begin{cases} L - r^2C > 0 \text{ et } L - R^2C > 0 \\ \text{ou} \\ L - r^2C < 0 \text{ et } L - R^2C < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{r^2 < \frac{L}{C} \text{ et } R^2 < \frac{L}{C}} \\ \underline{r^2 > \frac{L}{C} \text{ et } R^2 > \frac{L}{C}} \end{cases}$$

Exercice 8



Supposons le signal $u(t)$ sous la forme :

$u_0(t) = U_0\cos(\omega t)$

On écrit alors le signal $u_R(t)$ de la forme :

$u_R(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$

Passons en écriture complexe (en RSF) : $u_0(t) \rightarrow \underline{u_0}(t) = U_0 e^{j\omega t}$

$u_R(t) \rightarrow \underline{u_R}(t) = U e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$

Or $\underline{u_R}$ s'exprime en fonction de $\underline{u_0}$ grâce à un pont diviseur de tension.

$$\underline{u}_R = \frac{R}{R+jL\omega+r+\frac{1}{jC\omega}}\underline{u}_0 \Rightarrow \underline{U} = \frac{RU_0}{R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$$

Ainsi $U = |\underline{U}| = \dfrac{RU_0}{\sqrt{(R+r)^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ (*)

et $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{U}) = \mathrm{Arg}(RU_0) - \mathrm{Arg}\left(R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\right)$

$= 0 - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R+r}\right)$ (**)

Nous cherchons à déterminer r et C.

(*) donne $\left(\dfrac{RU_0}{U}\right)^2 = (R+r)^2 + \left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ (1)

(**) donc $\tan(-\varphi) = \dfrac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{(R+r)} \Rightarrow \tan^2(\varphi)\times(R+r)^2 = \left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ (2)

(1) et (2) combinés donnent : $\left(\dfrac{RU_0}{U}\right)^2 = (R+r)^2\left(1+\tan^2(\varphi)\right)$

D'où $r = \dfrac{RU_0/U}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} - R$

et (**) : $\dfrac{1}{C\omega} = \tan\varphi\cdot(R+r) + L\omega \Rightarrow C = \dfrac{1}{\tan\varphi\,(R+r)\omega + L\omega^2}$

Sur la figure on lit :

* pour U_0 : amplitude de 3div $\rightarrow$ $U_0 = 3\times 2 = 6V$

* pour U : amplitude de 2div $\rightarrow$ $U = 2\times 1 = 2V$

* pour φ : la voie 1 ($u_R(t)$) a un retard temporel par rapport à la voie 2 ($u_0(t)$) de 1 division donc de 1ms

Or la période est de 6 divisions, donc $T = 6\,ms$

Puis : $|\varphi| = 2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$

comme u_R est en retard par rapport à u_0, donc $\varphi < 0$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

AN: $r = 10 \times \frac{6/2}{\sqrt{1+\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}} - 10$ or $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$

$$= 10 \times \frac{3}{\sqrt{1+3}} - 10$$

$r = 5\,\Omega$

$$C = \frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times (5+10) \times \underbrace{\frac{2\pi}{6\times10^{-3}}}_{\omega = \frac{2\pi}{T}} + 100\times10^{-3}\left(\frac{2\pi}{6\times10^{-3}}\right)^2}$$

$C \simeq 12\,\mu F$