Révisions – **Lois de bases de la mécanique**

On s'entraînera sur des exercices **(A)** application des lois de bases de la dynamique et **(B)** approche énergétique. Deux problèmes plus longs sont proposés. Ils sont fortement conseillés pour les élèves aguerris.

EXERCICE 1 : Chute avec frottement (A⋆)

Un corps de masse $m = 2\,\text{kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9\,\text{m.s}^{-2}$. Lors de sa chute, il subit la force pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ?

EXERCICE 2 : Contact dans un ascenseur (A⋆)

Un homme de masse $m = 80\,\text{kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1\,\text{m.s}^{-1}$. On note $\overrightarrow{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur. On prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\overrightarrow{F}$?

EXERCICE 3 : Freinage (B⋆)

On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_o\vec{e}_x$. En freinant la voiture est soumise à une force de frottement $\overrightarrow{F} = -h\vec{e}_x$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

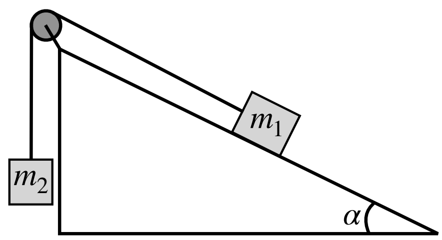
EXERCICE 4 : Pendule simple (B⋆)

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1{,}0\,\text{m}$ auquel est accroché une masse $m = 100\,\text{g}$. À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ où $v_0 = 2{,}0\,\text{m.s}^{-1}$. On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

Exprimer $\cos(\theta_0)$ et calculer θ_0.

EXERCICE 5 : Masses reliées par une poulie (A⋆⋆)

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil inextensible de masse négligeable. La masse m_1 glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle α et la masse m_2 a un déplacement vertical, le fil glissant sans frottement sur une poulie idéale.



1. Déterminer les accélérations des masses m_1 et m_2.
2. Exprimer la tension T du fil.
3. Déterminer la réaction R du plan incliné sur la masse m_1.

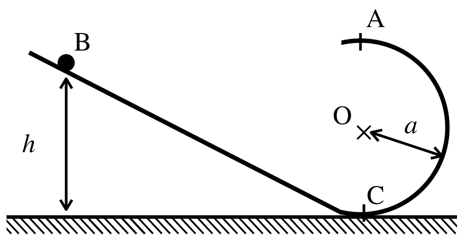
EXERCICE 6 : Mouvement d'un satellite (A⋆⋆)

On considère un satellite modélisé par un point M en orbite circulaire autour de la Terre. On note h son altitude et m sa masse. La Terre est modélisée par une boule de contre O, de masse M_T et de rayon R_T.

1. Faire un schéma et introduire la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée au satellite.
2. Exprimer dans cette base le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ainsi que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du satellite en fonction des données et de θ (et de ses dérivées).
3. Exprimer le vecteur accélération du satellite.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
5. Exprimer la vitesse du satellite en fonction de G (constante de gravitation universelle), M_T, R_T et h.

EXERCICE 7 : Looping (B⋆⋆)

On lâche une bille en B sans vitesse initiale en haut d'un looping composé d'une pente droite suivie d'un arc de cercle. On appelle C le point où l'arc de cercle touche le sol (C et A sont symétriques par rapport à O le centre du cercle). On néglige les frottements.

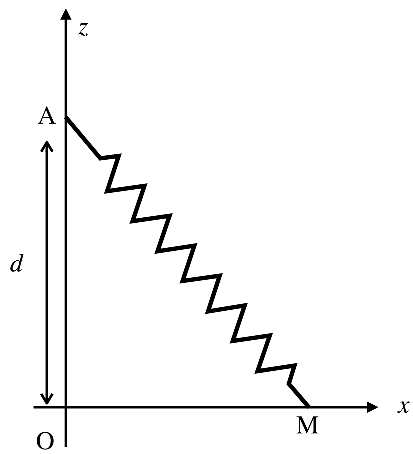


1. Trouver la vitesse de la bille au point A.
2. Déterminer l'expression de la réaction normale au support en un point quelconque de la partie circulaire paramétrée par $\theta = (\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.
3. Déterminer à quelle condition portant sur h la bille pourra atteindre le point A

EXERCICE 8 : Bifurcation (B⋆⋆)

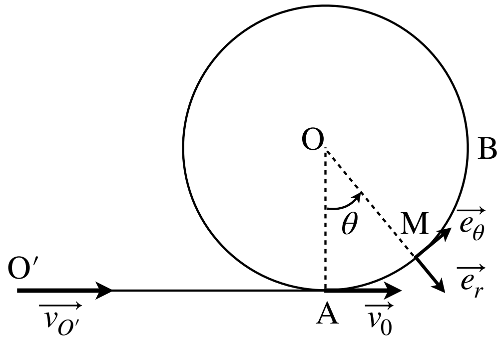
Un point matériel de masse m situé en M se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal (Ox). Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k à un point situé à la verticale de O tel OA = d. On note ℓ la longueur AM du ressort.

1. Tracer l'énergie potentielle du point matériel $E_p(x)$ dans les cas $d \geq \ell_0$ et $d \leq \ell_0$. En déduire les positions d'équilibres x_{eq} et leur stabilité.
2. Représenter x_{eq} en fonction de d. Analyser physiquement ce qu'il se passe lorsque l'on fait décroître d à partir d'une valeur supérieure à ℓ_0.



EXERCICE 9 : Mouvement sur une courbe circulaire (Problème A)

Une bille assimilée à un point matériel de masse m est lancée sur un guide constitué d'une partie rectiligne horizontale et d'une partie circulaire de centre O, de rayon R, située dans un plan vertical. La jonction entre la droite et le bas du cercle se fait en un point A. Une fois sur le guide circulaire, la position de la bille est notée par M et repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. On suppose, dans une première partie, que la bille n'est soumise à aucun frottement.



On la lance avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{O'}}$ à partir d'un point O′ de la partie rectiligne en direction du point A. On note $\overrightarrow{v_0}$ le vecteur vitesse de la bille en A.

1. Soit θ_a la valeur de l'angle θ pour laquelle la vitesse de la bille s'annule et θ_d la valeur de l'angle θ pour laquelle la bille décolle du guide. Exprimer $\cos(\theta_a)$ et $\cos(\theta_d)$ en fonction de $v_0 = ||\overrightarrow{v_0}||$.

2. Tracer les courbes de $\cos(\theta_a)$ et $\cos(\theta_d)$ en fonction de v_0. On fera apparaître les valeurs remarquables.

3. En déduire que, suivant la valeur de v_0, trois scénarios sont possibles :
- ▷ la bille quitte le guide (on précisera sur quelle partie du guide)
- ▷ la bille fait demi-tour (on précisera sur quelle partie du guide)
- ▷ la bille effectue un tour complet.

4. On tient compte maintenant de frottements solides, supposés obéir aux lois de Coulomb (facteur de frottement μ). Établir l'équation différentielle du mouvement circulaire pour θ croissant.

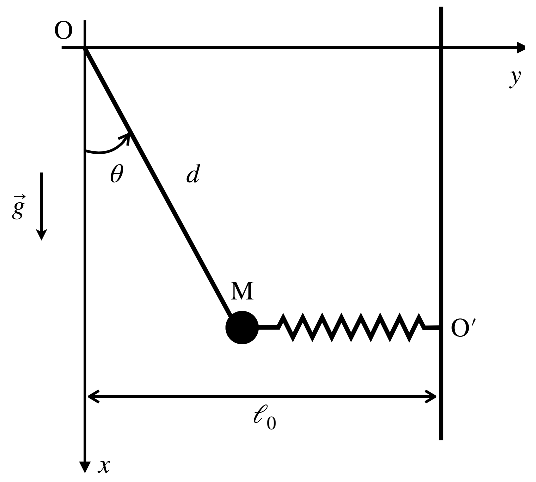
5. Pour la résoudre on pose $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Montrer que $f(\theta)$ obéit à un équation différentielle du type :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} + \alpha f(\theta) = \beta\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)$$

($\star\star\star$) On calculera la solution particulière de l'équation générale sous la forme $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$ et on calculera A et B en fonction de μ, g et R.

6. En déduire la condition pour que la bille arrive en B($\theta = \frac{\pi}{2}$). Pour cela , exprimer v_0 en fonction de R, A, B et μ. Comparer numériquement avec le cas sans frottement. On donne $\mu = 0{,}2$, $R = 1\,\text{m}$ et $g = 9{,}81\,\text{m.s}^{-2}$.

EXERCICE 10 : Pendule et ressort (Problème B)



On considère un pendule constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur d et d'un point matériel M de masse m. La liaison en O′ est parfaitement coulissante de sorte que le ressort est constamment horizontal. Le ressort est idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On néglige tout frottement.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Les exprimer en fonction de θ et des vecteurs de la base polaire.

2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2 \cos\theta + \omega_2^2\right) = 0$$

et préciser les expressions des constantes ω_1 et ω_2.

3. Montrer que le système est conservatif et mettre son énergie potentielle sous la forme :

$$E_p(\theta) = md^2\left(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta\right)$$

4. Montrer que le système possède toujours au moins deux positions d'équilibre. Montrer également qu'il en existe deux autres à une condition sur ω_1 et ω_2 que l'on précisera. Préciser alors dans quel intervalle se trouvent ces positions d'équilibre.

5. Montrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable. Déterminer alors l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = 0$ et en déduire la pulsation Ω des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

6. Montrer que la position d'équilibre $\theta = \pi$ n'est pas toujours stable et préciser alors à quelle condition elle l'est. Commenter physiquement.

7. Dans le cas où elle est stable, déterminer l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$ et en déduire l'expression de la pulsation Ω' des petites oscillations autour de cette position d'équilibre :

$$\Omega' = \sqrt{-\omega_2^2 + \omega_1^2}$$

8. Montrer enfin que les deux dernières positions d'équilibre déterminées en question **4.** ne sont jamais stables lorsqu'elle existent.

Données :

On rappelle l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$