

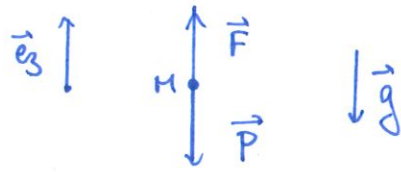
Correction - Lois de base de la méca.

Exercice 1

Réf: terrestre galiléen

Système: masse m

Bilan des forces: - poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- frottements $\vec{F} = F\vec{e}_z$



On applique le PFD: $m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow m(a) = -mg + F$
↑
projection selon $\vec{e}_z$

D'où $F = m(g - a)$

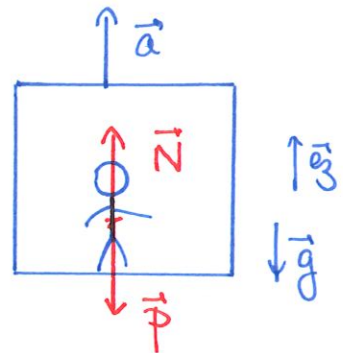
AN: $F = 2 \times (9,8 - 9) = \underline{1,6\text{N}}$

Exercice 2

Réf: terrestre galiléen

Système: homme de masse m

Bilan des forces: - poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
- réaction du plancher de l'arroseur: $\vec{N} = N\vec{e}_z$



On applique le PFD: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} \Rightarrow$ selon $\vec{e}_z$: $ma = N - mg$

Donc $N = ma + mg$

Or $\vec{F}$ = force de l'homme sur le plancher
et $\vec{N}$ = force du plancher sur l'homme

d'après le principe des actions réciproques:

$\vec{F} = -\vec{N}$

et donc $\|\vec{F}\| = \|\vec{N}\| = \underline{m(g + a)}$

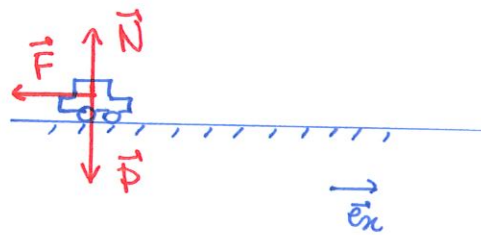
AN: $\|\vec{F}\| = 80 \cdot (9,8 + 1) \simeq \underline{864\text{N}}$

Exercice 3

Ref: terrestre galiléen

Système: voiture

Bilan des forces: - poids $\vec{P}$
 - réaction de la route $\vec{N}$
 - force de frottement $\vec{F} = -h\vec{e}_x$



On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les positions A (initial) et B (final, voiture à l'arrêt) tel que $AB = d =$ distance d'arrêt.

$$\Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \underbrace{W_{AB}(\vec{P})}_{=0} + \underbrace{W_{AB}(\vec{N})}_{=0} + W_{AB}(\vec{F})$$

car $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux au mouvement

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B h\vec{e}_x \cdot (dx\vec{e}_x) = -h \int_A^B dx = -h \cdot AB = -hd$$

$$\text{Ainsi : } \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 = -hd \Rightarrow \underline{d = \frac{mv_0^2}{2h}}$$

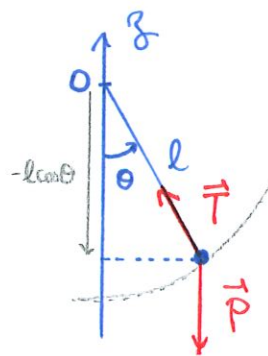
car $v_B = 0$

Exercice 4

Ref: terrestre galiléen

Système: masse m

Bilan des forces: - tension du fil $\vec{T}$
 - poids $\vec{P}$



le système est conservatif car $\vec{P}$ est une force conservative et $\vec{T}$ ne travaille pas.
 L'énergie mécanique est donc conservée.

$$\text{Or } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mglz + K \quad \text{avec } z = -l \cos \theta$$

$$\text{On pose } E_p(0) \text{ pour } \theta = 0 \Rightarrow -mgl \cos(0) + K = 0 \Leftrightarrow K = mgl$$

$$\text{d'où } E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

Or à $t=0$: $v=v_0$ et $\theta=0$ et à l'instant où il rebrousse chemin: $v=0$ et $\theta=\theta_0$.

$$\text{D'où } \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1 - \cos(0)) = \frac{1}{2}m0^2 + mgl(1 - \cos \theta_0) \Leftrightarrow \underline{\cos \theta_0 = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}}$$

$$\Rightarrow \underline{\theta_0 = 37^\circ}$$

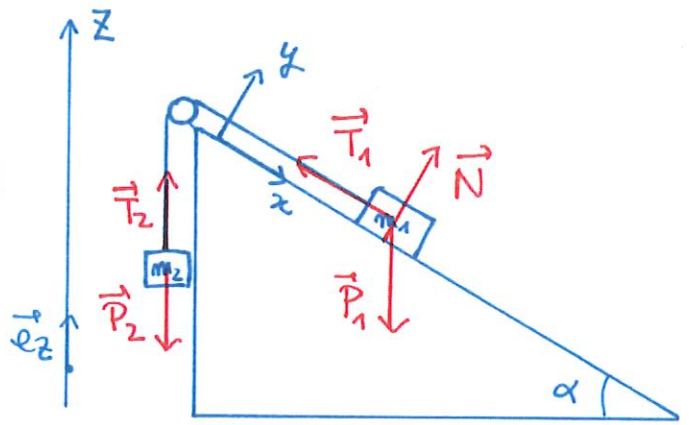
on aurait pu choisir $K=0$ aussi!

Exercice 5

1. Intéressons nous d'abord à la masse m_1

Bilan des forces sur m_1

- poids $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$
- tension du fil $\vec{T}_1$
- réaction du support $\vec{N}$
(pas de réaction tangentielle, car pas de frottement)



Alors le PFD appliqué à m_1 dans le réf. de laboratoire galiléen donne :

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}$$

* projection de $\vec{a}_1$: comme le mouvement se fait uniquement selon l'axe $\vec{e}_x$,
alors $\vec{a}_1 = \ddot{x}_1 \vec{e}_x$, $x_1(t)$ position de la masse m_1 au cours du temps.

* projection des forces :

$$\vec{P}_1 = m_1 g \sin \alpha \vec{e}_x - m_1 g \cos \alpha \vec{e}_y$$

$$\vec{T}_1 = -T_1 \vec{e}_x$$

$$\vec{N} = N \vec{e}_y$$

* projection du PFD :

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_x : m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin \alpha - T_1 & (*) \\ \text{selon } \vec{e}_y : 0 = -m_1 g \cos \alpha + N & (**) \end{cases}$$

Maintenant appliquons le même raisonnement pour m_2 :

Astuce : au lieu de s'embêter à utiliser le même repère que pour étudier la masse m_1 , j'introduis un axe Z indépendant, de vecteur unitaire $\vec{e}_Z$.

Bilan des forces sur m_2

- poids : $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$
- tension du fil : $\vec{T}_2$

Alors le PFD appliqué à la masse m_2 dans le réf. terrestre galiléen donne :

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$$

* projection $\vec{a}_2$: m_2 se déplace uniquement selon $\vec{e}_z$:
 $\vec{a}_2 = \ddot{z} \vec{e}_z$, où $z(t)$ est l'altitude du point m_2 au cours du temps.

* projection des forces : $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{e}_z$
 $\vec{T}_2 = T_2 \vec{e}_z$

* projection du PFD : selon $\vec{e}_z$: $m_2 \ddot{z} = -m_2 g + T_2$ (***)

Or la tension du fil étant la même le long d'un fil : $T_1 = T_2 = T$

(*) et (***) s'écrivent
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin \alpha - T \\ m_2 \ddot{z} = -m_2 g + T \end{cases}$$

en sommant les deux : $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{z} = m_1 g \sin \alpha - m_2 g$ (a)

Il manque une seconde équation pour déterminer $\ddot{x}_1$ et $\ddot{z}$! Nous n'avons pas encore écrit la condition d'inextensibilité du fil.

Cela a pour conséquence que la vitesse de m_1 selon $\vec{e}_x$ sera égale à la vitesse de m_2 selon $\vec{e}_z$.

On peut l'expliquer en écrivant que :

si m_1 se déplace de dx_1 selon $\vec{e}_x$
 alors m_2 se déplace de dz selon $\vec{e}_z$

tel que $dz = dx_1$

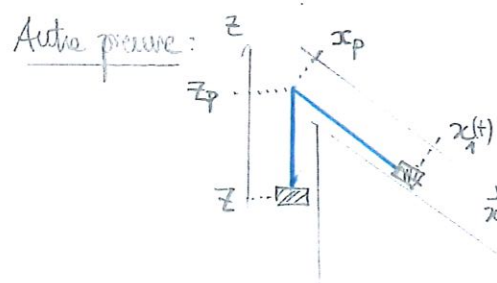
$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{x}_1 \text{ et donc } \underline{\ddot{z} = \ddot{x}_1} \text{ (b)}$$

Ainsi, avec (b), (a) s'écrit :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_1 \sin \alpha - m_2) g$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}_1 = \ddot{z} = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g}$$



Notons L la longueur du fil
 et z_p position de la poulie selon (Oz)
 x_p ————— (Ox)

$$\text{alors } L = \underbrace{(z_p - z)}_{\text{longueur du fil selon } \vec{e}_z} + \underbrace{(x_1 - x_p)}_{\text{longueur du fil selon } \vec{e}_x}$$

Or le fil est inextensible, donc $L = \text{cste}$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\dot{z} + \dot{x}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{z} = \dot{x}_1$$

Donc si $m_1 \sin \alpha > m_2$, $\ddot{x}_1$ et $\ddot{z} > 0$

(la masse m_2 remonte, et la masse m_1 descend la pente)

si $m_2 > m_1 \sin \alpha$, $\ddot{x}_1$ et $\ddot{z} < 0$

(la masse m_2 descend et la masse m_1 remonte la pente)

2. Prenons par exemple (***) et injectons l'expression de $\ddot{z}$ déterminée :

$$m_2 \left(\frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g \right) = -m_2 g + T$$

$$\Rightarrow T = m_2 g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} + m_2 g$$
$$= m_2 g \left(\frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} + 1 \right)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin \alpha)$$

3. L'équation (**) donne directement : $N = m_1 g \cos \alpha$

Exercice 6

1. Voir schéma ci-contre.

Rq: $\Delta \vec{e}_\theta$ toujours dans le sens des θ croissants

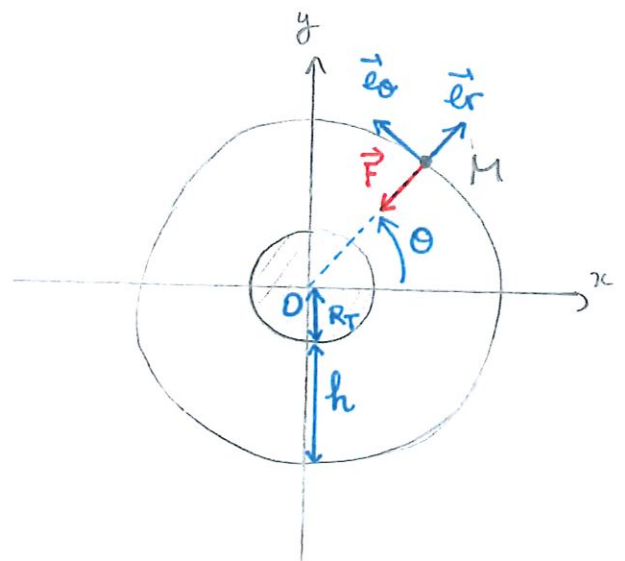
$$2. \underline{\vec{OM} = (R_T + h) \vec{e}_r}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[(R_T + h) \vec{e}_r \right] = (R_T + h) \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{v} = (R_T + h) \dot{\theta} \vec{e}_\theta}$$

$$3. \text{ En dérivant } \vec{v} : \underline{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[(R_T + h) \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right] = (R_T + h) (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{e}_r)}$$



4. Réf: géocentrique galiléen

Système: satellite Π

Bilan des forces: $\vec{F}$ force d'interaction gravitationnelle

$$\text{où } \vec{F} = -G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \vec{e}_r$$

Le PFD s'écrit: $m \vec{a} = \vec{F}$

$$\text{PFD projeté: } \begin{cases} \text{selon } \vec{e}_r: -m(R_T + h)\dot{\theta}^2 = -G \frac{m M_T}{(R_T + h)^2} & (*) \\ \text{selon } \vec{e}_\theta: m(R_T + h)\ddot{\theta} = 0 & (**) \end{cases}$$

L'équation (**) donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cste}$

Le satellite a une vitesse de rotation constante.

$$\text{or } \|\vec{v}\| = (R_T + h)|\dot{\theta}| = \text{cste}$$

Donc le mouvement est uniforme.

$$5. \text{ Utilisons l'équation } (*): (R_T + h)\dot{\theta}^2 = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$
$$\text{or } (R_T + h)\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

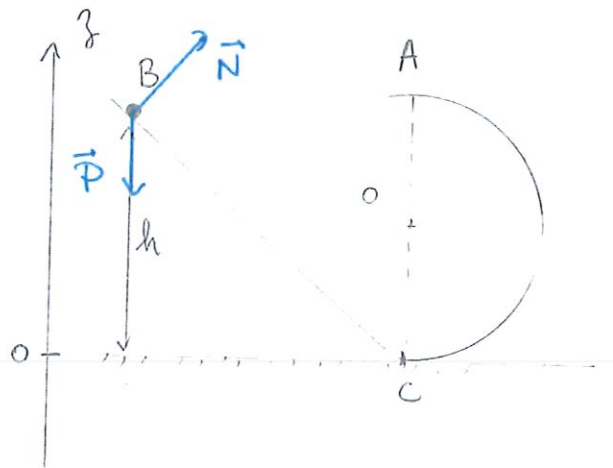
$$\text{d'où } \frac{v^2}{R_T + h} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \Rightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

Exercice 7

1. Ref: référentiel galiléen

sys: masse m

Bilan des forces: $\vec{P}$, $\vec{N}$



Utilisons une approche énergétique.

* Énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

* Énergie potentielle: $E_p = mgh + K$, on choisit $K=0$
(autrement dit on choisit $E_p(0)=0$)

* Énergie mécanique: $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

Or $\delta W(\vec{N}) = 0$ car $\vec{N}$ est constamment orthogonal au mouvement.

Donc E_m reste constante (le mouvement est conservatif !)

Or si la masse atteint A en $t=t_A$, alors

$$E_m(t=0) = E_m(t=t_A)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}m0^2}_{\text{vitesse initiale nulle}} + mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2a)$$

$$\text{D'où: } v_A^2 = 2g(h-2a) \quad \Rightarrow \quad \underline{v_A = \sqrt{2g(h-2a)}}$$

v_A n'est défini que si $h > 2a$ (il faut que l'énergie mécanique initiale soit suffisante pour mener la masse jusqu'en A)

2. Pour déterminer N , impossible d'utiliser le théorème énergétique, car $\vec{N}$ ne travaille jamais. Il faut utiliser le PFD.

$$\text{Il s'écrit } m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Or entre C et A; on utilise les coordonnées polaires (r, θ) pour étudier le mouvement.

$$\vec{N} = -N\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{on}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\vec{e}_r) = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{et alors } \vec{a} = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

En projection, le principe fondamental de la dynamique donne:

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta & (*) \\ ma\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ permet d'exprimer } N &= mg \cos \theta + ma\dot{\theta}^2 \\ &= mg \cos \theta + m \frac{v^2}{a} \quad \text{car } \|\vec{v}\| = |a\dot{\theta}| \end{aligned}$$

Or grâce à l'étude énergétique, on avait $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{cte} = mgh$

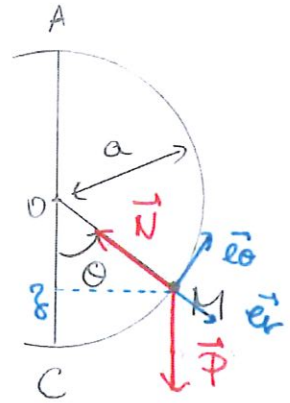
et sur la portion circulaire $z = a(1 - \cos \theta)$

$$\text{D'où } \frac{1}{2}mv^2 + mga(1 - \cos \theta) = mgh$$

$$\Rightarrow v^2 = 2g(h - a(1 - \cos \theta))$$

En réinjectant dans l'expression de N : $N = mg \cos \theta + 2mg \left(\frac{h - a(1 - \cos \theta)}{a} \right)$

$$\Rightarrow \underline{N = mg \left(3 \cos \theta + 2 \frac{h - a}{a} \right)}$$



3. Il faut que $N > 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ (lorsque la bille est en A).

Cela signifie que le contact est bien observé tout le long de la partie circulaire.

Donc $N > 0$ à $\theta = \pi$ s'écrit

$$mg \left(3 \cos(\pi) + \frac{2h-a}{a} \right) > 0$$

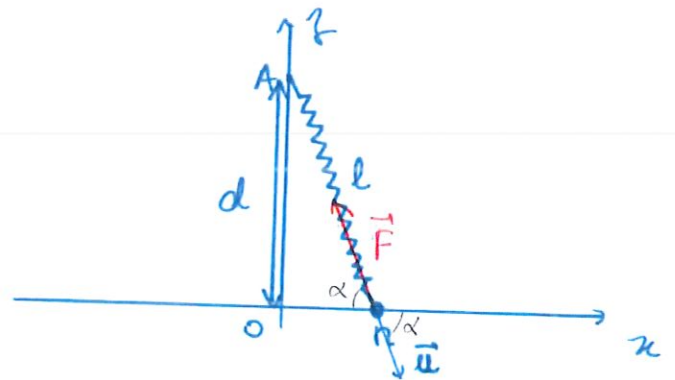
$$\Leftrightarrow -3a + 2h - a > 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{h > 2a}$$

On retrouve la même condition qu'à la première question.

Exercice 8

1. L'énergie potentielle du point matériel résulte de l'énergie potentielle élastique due au ressort.



Méthode 1:

$$\text{sachant que } E_p = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

$$\text{et } l^2 = d^2 + x^2$$

$$\text{D'où } E_p = \frac{1}{2} k (\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2$$

Méthode 2:

Écrire la force $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$ et le déplacement élémentaire $d\vec{on} = dx\vec{e}_x$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{on} = -k(l - l_0) dx \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{e}_x}_{\cos \alpha} \quad \text{où } \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \\ &= -k(\sqrt{x^2 + d^2} - l_0) \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} \end{aligned}$$

Puis à intégrer ...

* Tracé de $E_p(x)$

Calculons $\frac{dE_p}{dx}$ pour déterminer son évolution:

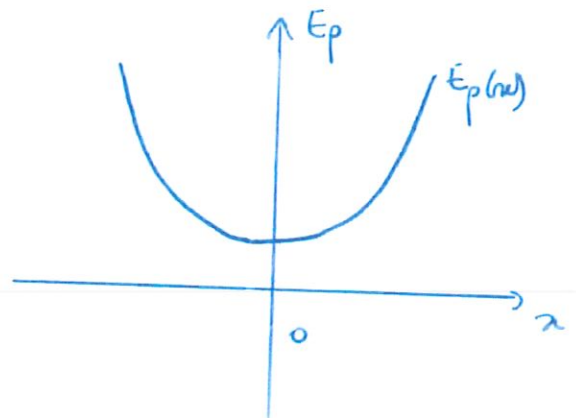
$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}k \times 2(\sqrt{x^2+d^2} - l_0) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{d^2+x^2}}$$

* Si $d > l_0$: $\sqrt{x^2+d^2} - l_0 > 0 \forall x$ ✓ car $d^2 > l_0^2 \Rightarrow x^2+d^2 > l_0^2$
 $\Rightarrow \sqrt{x^2+d^2} > l_0$

donc $\frac{dE_p}{dx}$ du signe de x

et $\frac{dE_p}{dx}$ s'annule en $x=0$

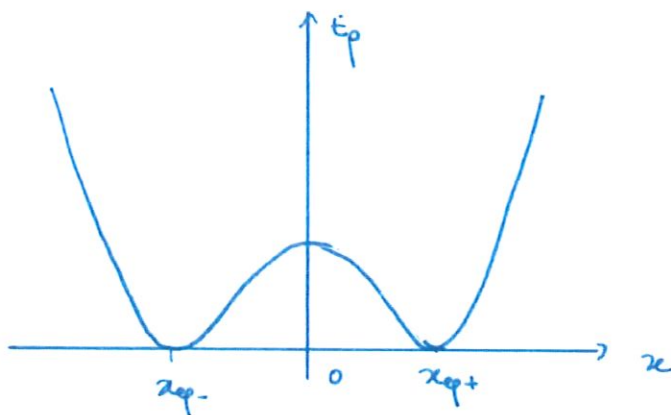
Vu que $x_{eq}=0$ est un minimum de E_p ,
 c'est une position d'équilibre stable



* si $d < l_0$:

x	$-\infty$	x_{eq-}	0	x_{eq+}	$+\infty$
x		-		+	
$\sqrt{x^2+d^2} - l_0$		+	-	+	
$E_p(x)$		↘	↗	↘	↗

$\sqrt{x^2+d^2} - l_0$ s'annule en
 $x_{eq\pm}$ tel que
 $\sqrt{x^2+d^2} = l_0$
 $\Leftrightarrow x^2 = l_0^2 - d^2$
 $\Leftrightarrow x_{eq\pm} = \pm \sqrt{l_0^2 - d^2}$

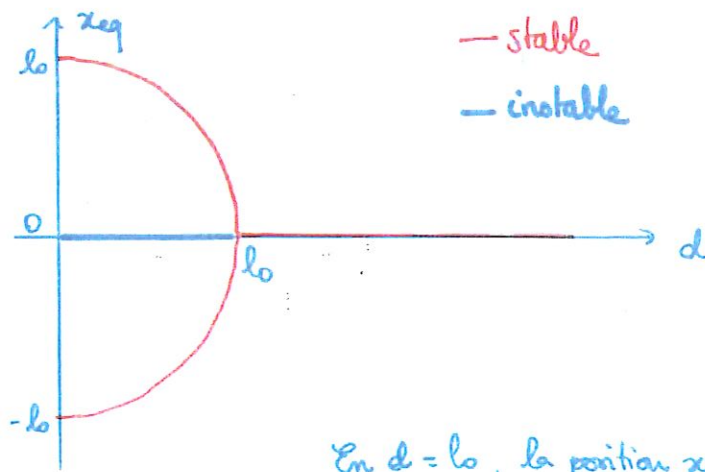


Il y a trois positions d'équilibres:

* $x_{eq}=0 \rightarrow$ instable
 (maximum d' E_p)

* $x_{eq} = \pm \sqrt{l_0^2 - d^2} \rightarrow$ stable
 (minimum d' E_p)

2.



En $d = l_0$, la position $x_{eq} = 0$ passe d'une position d'éq stable à instable. Quand d décroît et arrive à $d = l_0$, le système doit choisir la position d'équilibre stable à gauche. Il s'agit d'une brisure de symétrie.

Exercice 9

1. Ref: tenebre galiléen

Système: bille de masse m

Bilan des forces: - poids $\vec{P}$

- réaction du support $\vec{R}_N$
normale

- Projection des forces dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

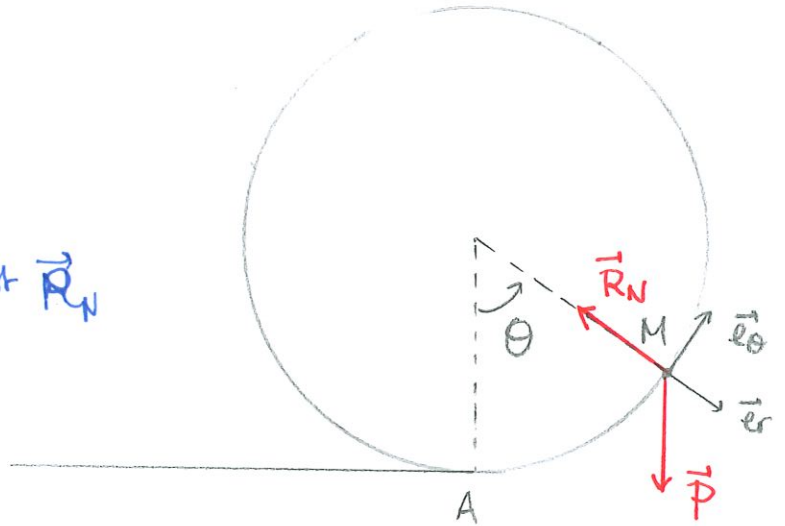
$$- \vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$- \vec{R}_N = R \vec{e}_r$$

- Expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\vec{O}N = R \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$



(a) Déterminer θ_a (cf exercice 4)

On utilise une approche énergétique. Comme la seule force qui travaille est une force conservative, l'énergie mécanique est conservée.

$$\text{Or } E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad E_p = m g z = m g \cdot (-R \cos \theta)$$

$$\text{Ainsi } E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - m g R \cos \theta = \text{cste}$$

$$\text{Or en A: } E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g R \cos(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g R$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} m v_0^2 - m g R = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - m g R \cos \theta$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta)}$$

Or on cherche θ_a où $\dot{\theta} = 0$ (vitesse s'annule), d'où $\underline{\cos \theta_a = 1 - \frac{v_0^2}{2gR}}$

(b) Déterminer θ_d

On utilise le PFD: $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$

cela donne selon $\vec{e}_r$: $m \cdot (-R\dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - R_N$

$$\Rightarrow R_N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

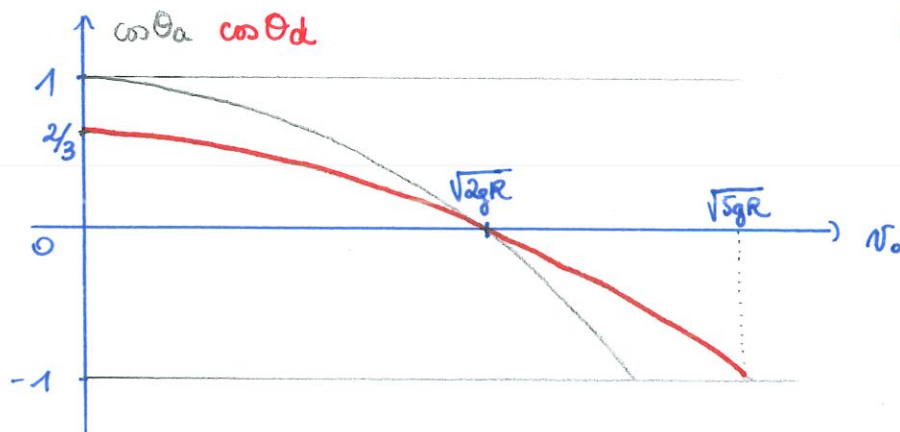
Or d'après (*), $\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)$

D'où $R_N = m \frac{v_0^2}{R} - mg(2 - 3 \cos \theta)$

La bille décolle du guide lorsque R_N s'annule :

$R_N = 0 \Leftrightarrow \cos \theta_d = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR}$

2.



Les deux courbes s'annulent pour $v_0 = \sqrt{2gR}$.

3. Il faut comparer $\cos \theta_a$ à $\cos \theta_d$. Pour une valeur de v_0 donnée, il faut déterminer si la bille s'arrête en premier ou si elle décolle du guide.

* pour $v_0 < \sqrt{2gR}$: $\cos \theta_a > \cos \theta_d$ donc $\theta_a < \theta_d < \frac{\pi}{2}$

La bille s'arrête et fait demi-tour (sans avoir atteint B) sans quitter le guide.

* pour $v_0 = \sqrt{2gR}$: $\cos \theta_a = \cos \theta_d = 0$ donc $\theta_a = \theta_d = \frac{\pi}{2}$

La bille s'arrête en B et fait demi-tour. C'est en B que la réaction R_N s'annule.

* pour $v_0 \in]\sqrt{2gR}, \sqrt{5gR}[$: $\cos \theta_a < \cos \theta_d$ donc $\theta_a > \theta_d > \frac{\pi}{2}$

La bille quitte le guide entre B et le sommet (sans que la vitesse ne s'annule).

* pour $v_0 > \sqrt{5gR}$: $\cos \theta_a$ et $\cos \theta_d$ ne sont plus définis. La bille ne s'arrête pas et ne décolle pas : elle fait un tour complet.

4. Dans le PFD, il faut ajouter la force $\vec{R}_T$ de frottements solides.

D'après les lois de Coulomb, tant que $\vec{v}$ (ou $\dot{\theta}$) ne s'annule pas, $\|\vec{R}_T\| = \mu \|\vec{R}_N\|$

ainsi $\vec{R}_T = -\mu R_N \vec{e}_\theta$ (tant que $\dot{\theta} > 0$)

Le PFD s'écrit alors : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

et projeté dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -R_N + mg\cos\theta & (*) \\ mR\ddot{\theta} = -\mu R_N - mg\sin\theta & (**) \end{cases}$$

En combinant $(**)-\mu \times (*)$:

$$mR\ddot{\theta} + m\mu R\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\sin\theta - \frac{g}{R}\mu\cos\theta}$$

5. On pose $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$

$$\text{alors } \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{df}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{df}{d\theta} \Rightarrow \frac{df}{d\theta} = 2\ddot{\theta}$$

Ainsi l'équation devient : $\frac{1}{2} \frac{df}{d\theta} + \mu f(\theta) = -\frac{g}{R}\sin\theta - \frac{g}{R}\mu\cos\theta$

$$\Rightarrow \underline{\frac{df}{d\theta} + \alpha f(\theta) = \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta}$$

$$\text{où } \alpha = 2\mu$$

$$\beta = -\frac{2g\mu}{R}$$

$$\gamma = -\frac{2g}{R}$$

C'est une équation de premier ordre à coefficients constants !

$$\underline{f(\theta) = \lambda e^{-\alpha\theta} + f_p(\theta)}$$

solution de
l'éq. homogène
associée

↑ solution particulière

où λ = cste d'intégration

On cherche $f_p(\theta)$ sous la forme : $f_p(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta$.

On réinjecte dans l'équation différentielle :

$$(-A\sin\theta + B\cos\theta) + \alpha(A\cos\theta + B\sin\theta) = \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta$$

$$\text{ainsi : } (B + \alpha A) \cos \Theta + (-A + \alpha B) \sin \Theta = \beta \cos \Theta + \gamma \sin \Theta$$

Cette relation est vérifiée $\forall \Theta$, donc :

$$\begin{cases} B + \alpha A = \beta \\ -A + \alpha B = \gamma \end{cases}$$

cela mène à

$$\begin{cases} B(1 + \alpha^2) = \beta + \alpha \gamma \\ A = \alpha B - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\beta + \alpha \gamma}{1 + \alpha^2} \\ A = \frac{\alpha \beta + \alpha^2 \gamma}{1 + \alpha^2} - \gamma = \frac{\alpha \beta - \gamma}{1 + \alpha^2} \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} A = \frac{-4g\mu^2/R + 2g/R}{1 + 4\mu^2} = \frac{2g}{R} \cdot \frac{1 - 2\mu^2}{1 + 4\mu^2} \\ B = \frac{-2g\mu/R - 4g\mu/R}{1 + 4\mu^2} = \frac{2g}{R} \cdot \frac{-3\mu}{1 + 4\mu^2} \end{cases}$$

Pour finir la résolution, il reste à déterminer λ la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales.

En $\Theta = 0$, $f(0) = \ddot{\Theta}(0) = \frac{v_0^2}{R^2}$

or $f(0) = \lambda e^{-\alpha \cdot 0} + f_p(0) = \lambda + A$

D'où $\lambda + A = \frac{v_0^2}{R^2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_0^2}{R^2} - A$

En conclusion, la solution à l'équation différentielle donne :

$$\ddot{\Theta} = \left(\frac{v_0^2}{R^2} - A \right) e^{-2\mu\Theta} + A \cos \Theta + B \sin \Theta$$

6. Entre A et B, $R_N > 0$ car (*) donne : $R_N = \underbrace{mR\dot{\Theta}^2}_{\geq 0} + \underbrace{mg \cos \Theta}_{> 0 \text{ pour } \Theta \in [0, \frac{\pi}{2}[}$

Ainsi, il ne peut y avoir de décrochage de la bille avant d'atteindre B.

Dans la cas limite où la bille atteint B sans le dépasser : $\dot{\Theta} = 0$ quand $\Theta = \frac{\pi}{2}$

cela donne d'après la question précédente : $\left(\frac{v_0^2}{R^2} - A \right) e^{-2\mu \cdot \frac{\pi}{2}} + A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

donc $\left(\frac{v_0^2}{R^2} - A \right) e^{-\mu\pi} + B = 0 \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{R^2} = A - B e^{\mu\pi}$

Donc pour atteindre B, il faut $v_0 > R \sqrt{A - B e^{\mu\pi}}$

AN : $v_0^{(\text{lim})} = 5,88 \text{ m.s}^{-1}$ (avec frot.)
 $v_0^{(\text{lim})} = 4,43 \text{ m.s}^{-1}$ (sans)

Exercice 10

1. Réf: terrestre galiléen

Syst: masse m

Bilan des forces: poids $\vec{P} = m\vec{g}$

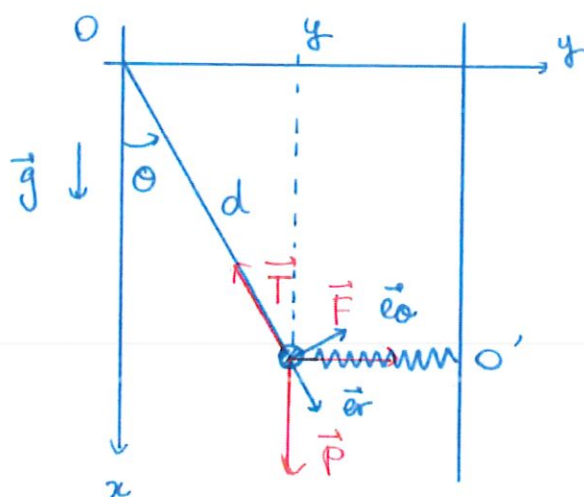
- tension du ressort

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_y$$

$$\text{or } l = l_0 - y$$

$$\text{d'où } \vec{F} = -ky\vec{e}_y$$

- tension $\vec{T}$ de la tige.



On projette dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{F} = -ky\vec{e}_y \quad \text{or } \vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r$$

à vérifier dans les cos limites!

$$\text{et } y = d \sin \theta$$

$$\text{d'où } \vec{F} = -kd \sin \theta (\cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r)$$

2. On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}$$

en projetant selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ l'accélération :

$$\vec{v} = d\vec{r} \Rightarrow \vec{v} = d\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{et } \vec{a} = -d\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + d\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Dans le PFD projeté :

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_r : -m d\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - k d \sin^2 \theta - T (*) \\ \text{selon } \vec{e}_\theta : m d\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - k d \sin \theta \cos \theta (**) \end{cases}$$

L'équation (**) donne : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{d} \sin \theta - \frac{k}{m} \sin \theta \cos \theta$

en posant $\omega_2^2 = \frac{g}{d}$ et $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ on trouve :

$$\ddot{\theta} + \sin \theta (\omega_1^2 \cos \theta + \omega_2^2) = 0$$

3. Comme $\vec{P}$ et $\vec{F}$ sont des forces conservatives et $\vec{T}$ ne travaille pas, le système est conservatif et son énergie mécanique se conserve.

Méthode 1 : Comme $E_{pp} = \underbrace{-mgx + K}_{\text{attention car axe des } x \text{ descendant}}$
 $\uparrow$ choisi égal à 0

et $E_{pe} = \frac{1}{2} k y^2 + K'$
 $\uparrow$ choisi à 0

et $x = d \cos \theta$, $y = d \sin \theta$, on trouve :

$$\begin{aligned} E_p &= E_{pp} + E_{pe} = -mgd \cos \theta + \frac{1}{2} k (d \sin \theta)^2 \\ &= md^2 \left(\frac{k}{2m} \sin^2 \theta - \frac{g}{d} \cos \theta \right) \\ &= \underline{md^2 \left(\frac{\omega_1^2}{2} \sin^2 \theta - \omega_2^2 \cos \theta \right)} \end{aligned}$$

Méthode 2 : Comme le déplacement élémentaire est

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta = dx d\theta \vec{e}_\theta \quad \text{car } r = d = \text{cte}$$

car $dr = 0$ (pas de déplacement selon $\vec{e}_r$)

Donc le travail des forces conservatives est :

$$\delta W = (\vec{P} + \vec{F}) \cdot d\vec{on}$$

$$= [mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta - k d \sin \theta (\cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r)] \cdot d\theta \vec{e}_\theta$$

$$= -mg d \sin \theta d\theta - k d^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\text{or } \sin \theta d\theta = -d[\cos \theta] \quad \text{et} \quad \sin \theta \cos \theta d\theta = d\left[\frac{\sin^2 \theta}{2}\right]$$

$$\text{car } \frac{d}{d\theta}(\sin^2 \theta) = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\text{d'où } \delta W = d[mg d \cos \theta] - d\left[\frac{k d^2}{2} \sin^2 \theta\right]$$

$$= -d\left[\frac{k d^2}{2} \sin^2 \theta - mg d \cos \theta\right]$$

$$\text{or } \delta W = -dE_p$$

$$\text{D'où } E_p = \frac{k d^2}{2} \sin^2 \theta - mg d \cos \theta + C \quad \leftarrow \text{ou choisit } = 0$$

$$= m d^2 \left[\frac{k}{2m} \sin^2 \theta - \frac{g}{d} \cos \theta \right]$$

$$= \underline{m d^2 \left[\frac{\omega_1^2}{2} \sin^2 \theta - \omega_2^2 \cos \theta \right]}$$

4. Les positions d'équilibre sont les positions θ telles que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

$$\text{Or } \frac{dE_p}{d\theta} = m d^2 (\omega_1^2 \sin \theta \cos \theta + \omega_2^2 \sin \theta)$$

$$= m d^2 \sin \theta (\omega_1^2 \cos \theta + \omega_2^2)$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 & (*) \\ \text{ou} \\ \omega_1^2 \cos \theta + \omega_2^2 = 0 & (**) \end{cases}$$

(*) donne comme positions d'équilibre $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

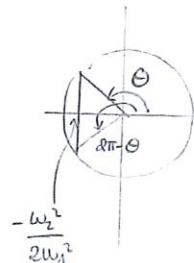
(**) n'est possible que si $\cos \theta$ est bien entre -1 et 1

$$\text{donc } \cos \theta = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} > -1 \Leftrightarrow \underline{\omega_2^2 < \omega_1^2}$$

si la condition est vérifiée, alors il y a deux positions d'équilibres

supplémentaires : $\underline{\theta = \arccos\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]}$

et $\underline{\theta = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]}$



5. Déterminer le signe de $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$ par $\theta=0$:

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = md^2 \cos \theta (\omega_1^2 \cos \theta + \omega_2^2) + md^2 \sin \theta (-\omega_1^2 \sin \theta)$$

$$\text{par } \theta=0 : \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(0) = md^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) > 0$$

D'où la position $\theta=0$ est un équilibre stable.

Méthode 1: Autour de $\theta_0 = 0$, E_p s'écrit :

$$E_p(\theta) = E_p(0) + \frac{1}{2} \underbrace{(\theta - \theta_0)^2}_{=0} \text{ où } K = \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(0)$$

$$\text{et, comme } E_m = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0:$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} [E_c + E_p] = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (d\dot{\theta})^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(E_p(0) + \frac{1}{2} K (\theta - \underbrace{\theta_0}_{=0})^2 \right)$$

$$= md^2 \ddot{\theta} + K \dot{\theta} \theta$$

$$\text{et } \frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{K}{md^2} \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0} \quad \text{où } \underline{\Omega^2 = \frac{K}{md^2} = \omega_1^2 + \omega_2^2}$$

Méthode 2 : Prenons l'équation du mouvement de la question 2 et développons autour de $\theta_{eq} = 0$:

$$\text{alors } \sin \theta \approx \theta \text{ et } \cos \theta \approx 1$$

$$\text{et on obtient } \ddot{\theta} + \theta(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0$$

on retrouve le même résultat !

Rq: de manière plus rigoureuse, cela revient à faire un développement limité à l'ordre 1 de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ autour de $\theta_{eq} = 0$.

6. Reprenons l'expression de $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$ et évaluons son signe pour $\theta = \pi$:

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta = \pi) = md^2(-1)(-\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

Donc si $\omega_1^2 > \omega_2^2$ alors $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} > 0$, $\theta_{eq} = \pi$ est stable

si $\omega_1^2 < \omega_2^2$ alors $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} < 0$, $\theta_{eq} = \pi$ est instable

Comparer ω_1^2 et ω_2^2 revient à comparer la contribution de la force du ressort (ω_1^2) à celle de la pesanteur (ω_2^2). En $\theta_{eq} = \pi$, le ressort est au repos (minimum d'énergie potentielle élastique) alors que le pendule est à l'envers (maximum d'énergie potentielle de pesanteur). Si la force de rappel (donc la raideur du ressort) est suffisamment grande pour contrer l'influence de la pesanteur à ramener la masse vers le bas, θ_{eq} reste stable. Cela se traduit par $\frac{k}{m} > \frac{g}{d}$
 $\Leftrightarrow k > \frac{mg}{d}$

7. Dans le cas où la position $\theta_{eq} = \pi$ est stable, alors

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta = \pi) = md^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

en refaisant le même raisonnement qu'à la question 5, en remplaçant k par $k' = md^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)$, on trouve :

$$\ddot{\Theta} + \Omega'^2 \Theta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega'^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega' = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}}$$

Rq: on aurait pu de nouveau développer autour de $\Theta_q = \pi$ l'équation du mouvement. En posant $\Theta = \Theta_q + \varepsilon(t)$, $\varepsilon \ll \Theta_q$, on a :

$$\cos(\Theta_q + \varepsilon) \approx -1 \text{ à l'ordre 1}$$

$$\sin(\Theta_q + \varepsilon) \approx \varepsilon \text{ à l'ordre 1}$$

$$\ddot{\Theta} = \ddot{\varepsilon} \text{ car } \frac{d^2}{dt^2}(\Theta_q + \varepsilon) = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$$

$$\text{d'où } \underline{\ddot{\varepsilon} + \varepsilon(-\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0}$$

8. Pour que les deux dernières positions d'équilibre existent, il faut $\omega_1^2 > \omega_2^2$ et alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{q1} = \arccos\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \\ \Theta_{q2} = 2\pi - \arccos\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \end{array} \right.$$

$$\text{or } \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\Theta^2}(\Theta_{q1}) = md^2 \cos \Theta_{q1} (\omega_1^2 \cos \Theta_{q1} + \omega_2^2) - md^2 \omega_1^2 \sin^2 \Theta_{q1}$$

$$\text{et } \cos \Theta_{q1} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$$

$$\text{et } \omega_1^2 \cos \Theta_{q1} + \omega_2^2 = \omega_1^2 \left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) + \omega_2^2 = 0$$

$$\text{d'où } \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\Theta^2}(\Theta_{q1}) = -md^2 \omega_1^2 \sin^2(\Theta_{q1}) < 0$$

La position Θ_{q1} est donc une position d'équilibre instable

Le calcul avec Θ_{q2} mène au même résultat et donc à la même conclusion.