Annales - Problème (ondes et interférences)

Formulaire

— On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^2(a/2) = \frac{1+\cos(a)}{2}$$

I Interrupteurs optiques

Dans cette partie on s'intéressera à la bistabilité de dispersion, qui est obtenue en utilisant un milieu transparent non-linéaire dont l'indice dépend de l'intensité lumineuse comme $n = n_0 + \gamma I$, avec n_0 l'indice de réfraction linéaire et γ le coefficient d'indice non linéaire supposé constant. Plus particulièrement on démontrera qu'un interféromètre de Mach-Zehnder, illustré en figure I.1, contenant un milieu non-linéaire dans l'un de ses bras, peut fonctionner comme un interrupteur optique.

L'interféromètre (illustré en figure I.1) est constitué :

— de deux lames séparatrices semi-réfléchissante (nommées lame 1 et lame 2), dont le rôle est de diviser la lumière incidente en une onde transmise et une onde réfléchie,

— et de deux miroirs parfaitement réfléchissants.

Lorsqu'une onde est réfléchie ou transmise par la lame séparatrice, l'intensité lumineuse de l'onde est divisée par deux, soit une division par $\sqrt{2}$ de son amplitude. De plus, et ce uniquement lors de la réflexion sur la lame séparatrice, un déphasage supplémentaire de $\pi/2$ est accumulé par l'onde. Il n'y a pas de déphasage supplémentaire à considérer lors d'une transmission à travers la lame séparatrice.

On ne tiendra pas compte du déphasage de π induit lors de la réflexion sur les miroirs, car ce déphasage se compensera.

On place au sein de l'interféromètre deux matériaux de longueur L, l'un d'indice n et l'autre d'indice n'.

Une source envoie un faisceau de lumière cohérente qui est collimatée afin de produire une onde plane progressive monochromatique. On appellera E_0 l'amplitude du champ électrique caractérisant l'onde lumineuse, I_0 l'intensité lumineuse incidente définie par $I_0 = \frac{1}{2}|E_0|^2$ et ω la pulsation de l'onde.

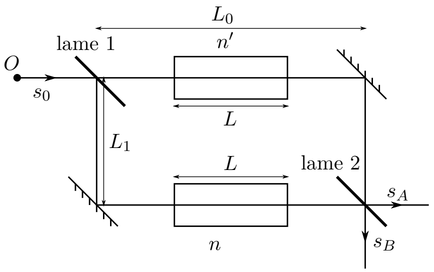
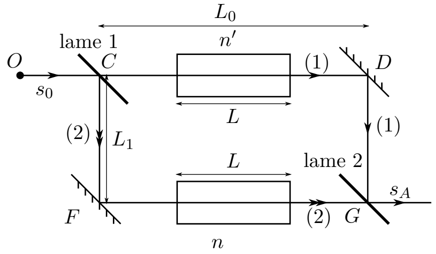


FIGURE I.1 – Schéma de l'interféromètre de Mach-Zehnder

Deux ondes ressortent dans des directions différentes après passage par la deuxième lame séparatrice. On note s_A et s_B ces deux signaux.

1. *En vous appuyant sur une figure, identifier le trajet des deux ondes s_{A1} et s_{A2} qui interfèrent pour donner s_A.*

Réponse :
L'onde (1) parcourt le trajet CDG avec une transmission lors de la traversée de la première lame et une réflexion au niveau de la seconde lame. L'onde (2) parcourt le trajet CFG avec une réflexion au niveau de la première lame et une transmission au niveau de la seconde lame.



2. *On cherche à déterminer les chemins optiques des deux ondes s_{A1} et s_{A2} . Expliquer pourquoi le déphasage lors d'une réflexion sur la lame séparatrice revient à ajouter $\frac{\lambda}{4}$ au chemin optique de l'onde .*

Réponse :
La réflexion ajoute un déphase de $\Delta\phi_{\text{reflexion}} = \pi/2$. Or $\Delta\phi_{\text{reflexion}} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta_{\text{reflexion}}$, donc cela ajoute un chemin optique $\delta_{\text{reflexion}} = \frac{\lambda}{2\pi} \times \frac{\pi}{2} = \lambda/4$.

3. *On note δ_{A1} et δ_{A2} les chemins optiques des ondes s_{A1} et s_{A2} entre les deux lames séparatrices. Exprimer δ_{A1} et δ_{A2} en fonction de n, n', λ, L, L_0 et L_1. On n'oubliera pas le chemin optique supplémentaire lors d'une réflexion sur la lame séparatrice. On prendra l'indice optique de l'air égal à 1.*

Réponse :
On en déduit la différence de marche pour l'onde (1) :

$$\delta_{A1} = (CD) + (DG) + \frac{\lambda}{4}$$

Pour le chemin optique, il faut tenir compte que la longueur L se fait dans un milieu d'indice n', et la longueur $L_0 - L$ dans l'air d'indice 1. D'où

$$\boxed{\delta_{A1} = n'L + (L_0 - L) + L_1 + \frac{\lambda}{4}}$$

On trouve également la différence de marche pour l'onde (2) :

$$\delta_{A2} = (CF) + (FG) + \frac{\lambda}{4} \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta_{A2} = nL + (L_0 - L) + L_1 + \frac{\lambda}{4}}$$

Le terme $\lambda/4$ apparaît dans les deux cas car il y a chaque fois une unique traversée d'un miroir semi-réfléchissant (soit le premier, soit le deuxième).

4. *En déduire la différence de marche $\delta_A = \delta_{A1} - \delta_{A2}$.*

Réponse :
On en déduit la différence de marche entre les deux ondes :

$$\boxed{\delta_A = (n' - n)L}$$

Le déphasage est bien nul si $n' = n$ (les deux chemins deviennent identiques).

5. *On note $s_0(t) = E_0\cos(\omega t)$ l'onde émise par la source lumineuse à l'entrée de l'interféromètre. Exprimer les signaux $s_{A1}(t)$ et $s_{A2}(t)$ des deux ondes à la sortie A de la deuxième lame. En déduire l'expression de l'onde résultante $s_A(t)$. On exprimera l'amplitude E_A de $s_A(t)$ en fonction de δ_A, E_0 et λ.*

Réponse :
On fait attention que l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$ à chaque traversée de la lame, donc l'amplitude est divisée par deux puisqu'il y a deux lames. D'où, en notant $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$s_{A1}(t) = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k\delta_{A1}) \quad \text{et} \quad s_{A2}(t) = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k\delta_{A2})$$

L'onde résultante est la superposition de ces deux ondes, donc $s_A(t) = s_{A1}(t) + s_{A2}(t)$. En utilisant la relation $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$, et on trouve

$$\begin{aligned} s_A(t) &= \frac{E_0}{2}\left[\cos(\omega t - k\delta_{A1}) + \cos(\omega t - k\delta_{A2})\right] \\ &= E_0\cos\left(\frac{k(\delta_{A1}-\delta_{A2})}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{k(\delta_{A1}+\delta_{A2})}{2}\right) \end{aligned}$$

On pose l'amplitude de l'onde

$$E_A = E_0\left|\cos\left(\frac{k\delta_A}{2}\right)\right| = E_0\sqrt{\cos^2\left(\frac{k\delta_A}{2}\right)}$$

En utilisant la relation $\cos^2(a/2) = \dfrac{1+\cos(a)}{2}$, on aboutit à l'expression suivante

$$\boxed{E_A = E_0\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta_A\right)}{2}}}$$

---

6. *En déduire que l'intensité de l'onde à la sortie A de l'interféromètre s'écrit*

$$I_A = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times(n'-n)L\right)\right]$$

Réponse :
Par définition $I_A = \dfrac{E_A^2}{2}$ et $I_0 = \dfrac{E_0^2}{2}$. On a alors

$$I_A = \frac{1}{2}\times E_0^2 \times \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta_A\right)}{2}$$

En remplaçant $\delta_A = (n'-n)L$ et $I_0 = E_0^2/2$, on trouve l'expression de l'énoncé

$$I_A = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times(n'-n)L\right)\right]$$

---

7. *De la même manière, exprimer les chemins optiques δ_{B1} et δ_{B2} des deux ondes interférant à la sortie B de l'interféromètre. En déduire $\delta_B = \delta_{B1} - \delta_{B2}$, et l'expression de l'intensité I_B de l'onde résultante.*

Réponse :
La différence par rapport au cas précédent est le traitement de la lame 2.
L'onde (1) parcourt le même trajet CDG, mais subit deux transmissions, donc $\delta_{B1} = n'L + (L_0 - L) + L_1$.
L'onde (2) parcourt le même trajet CFG, mais subit deux réflexions, donc $\delta_{B2} = nL + (L_0 - L) + L_1 + \lambda/2$.
On en déduit

$$\boxed{\delta_B = (n'-n)L - \lambda/2 \quad \text{et} \quad I_B = \frac{I_0}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times(n'-n)L\right)\right]}$$

---

8. *Exprimer $I_A + I_B$. Commenter.*

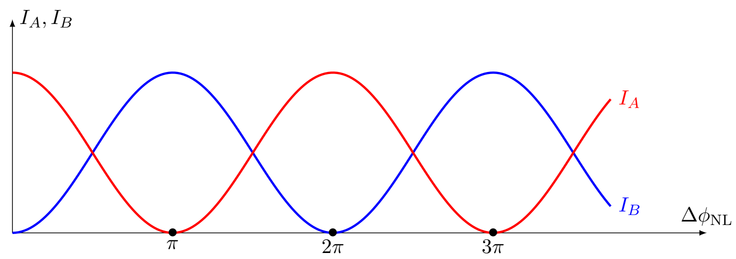
Réponse :
On constate que $I_A + I_B = I_0$ ce qui retranscrit la conservation de l'énergie lumineuse.

---

9. *On considère maintenant que l'indice n' dépend de l'intensité lumineuse I de l'onde traversant le milieu d'indice n' : $n' = n + \gamma I$, avec γ une constante réelle. Donner dans ce cas l'expression du déphasage entre les ondes s_{A1} et s_{A2}, que l'on notera $\Delta\phi_{NL}$. Tracer alors I_A et I_B en fonction de $\Delta\phi_{NL}$.*

Réponse :
On a $\Delta\phi_{NL} = \dfrac{2\pi}{\lambda}(n'-n)L$, donc $\boxed{\Delta\phi_{NL} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\times\dfrac{\gamma I_0}{2}L}$, car l'intensité de l'onde traversant le milieu d'indice n' est $I = I_0/2$.
On rappelle les fonctions à tracer, elles sont en opposition de phase :

$$I_A = \frac{I_0}{2}(1+\cos(\Delta\phi_{NL})) \quad \text{et} \quad I_B = \frac{I_0}{2}(1-\cos(\Delta\phi_{NL}))$$



---

10. *Que se passe-t-il pour le déphasage $\Delta\phi_{NL} = \pi$? Expliquer pourquoi le dispositif expérimental présenté peut être utilisé comme un « trieur d'impulsion », comme représenté en figure I.2.*

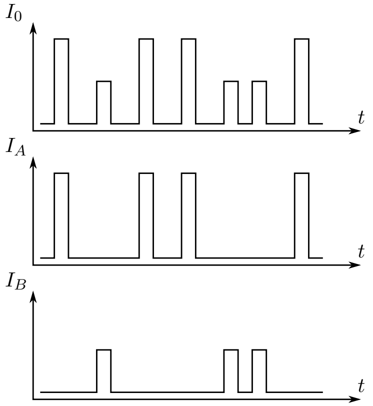


FIGURE I.2 – Illustration de l'utilisation de l'interféromètre de Mach-Zehnder comme un « trieur d'impulsion ».

Réponse :
Si $\Delta\phi_{\mathrm{NL}} = \pi$, le faisceau est entièrement transmis par la $\boxed{\text{seule voie } B}$. On peut donc trier les impulsions comme proposé : si l'intensité est faible, $\Delta\phi_{\mathrm{NL}}$ est proche de π et toutes ces impulsions basse intensité passent par la voie B tandis que si elle est plus élevée $\Delta\phi_{\mathrm{NL}}$ est proche de 2π et toutes ces impulsions haute intensité passent par la voie A.