

Devoir maison n°7

À rendre le 3 février 2025

Ce sujet porte sur l'étude du fonctionnement d'un cyclotron. Il est composé de 3 page(s). L'intégralité du sujet est à traiter. L'entraide entre élèves est autorisée, la rédaction de la copie reste personnelle.

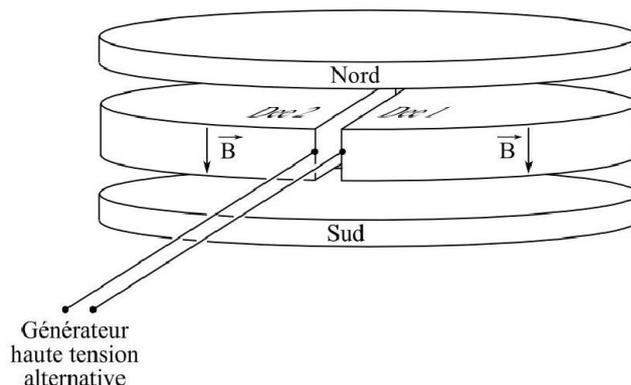
Rappel :

- ▷ Comme pour tous les devoirs (DS, DM et lors des concours), les réponses doivent être **soulignées ou encadrées** dans une couleur autre que celle de rédaction (rouge par exemple).
- ▷ La numérotation des questions répondues doit clairement apparaître sur la copie.
- ▷ Un saut de ligne doit être clairement observé entre deux questions distinctes.

★ ★ ★

EXERCICE 1 : Cyclotron

Un cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R , très légèrement écartés et creux, les Dees, au sein desquels règne un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant d'intensité $B = 1,67\text{T}$. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100\text{kV}$ crée un champ \vec{E} perpendiculaire aux faces en regard des Dees.



Des protons de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ et de charge $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\text{ C}$, animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A_0 (voir schéma 1 en fin de sujet) de l'espace séparant les deux Dees.

Dans tout le problème, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.

Étude du mouvement dans les Dees

On étudie le mouvement d'un proton qui pénètre pour la première fois dans le Dee 1 en A avec la vitesse \vec{v}_1 , de norme V_1 .

1. Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.
2. Reproduire le schéma 1 en fin de sujet et y représenter les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2 .
3. Établir le système d'équations différentielles du mouvement en coordonnées cartésiennes. Faire apparaître la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{m}$ et montrer que cette grandeur est bien homogène à une pulsation.

4. On admet que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est un cercle de centre O. Montrer que le rayon de ce cercle a pour expression $R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}$.

On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la n -ième traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon $R_n = \frac{V_n}{\omega_c}$.

5. Exprimer, en fonction de R_n la distance parcourue dans un Dee lors du n -ième demi-tour.
6. Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m , e et B .

Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees (très faiblement écartés), le proton est accéléré selon une trajectoire rectiligne.

7. Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique \vec{E} entre les Dees quand le proton décrit A_0A , puis BC . Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans le schéma de l'annexe) pour que les protons soient toujours accélérés quand ils passent entre les Dees?
8. Le schéma 2 fournit le graphe de la tension $u(t)$. Reproduire puis faire apparaître sur ce graphe : la zone où le proton passe de A_0 à A , puis lorsqu'il passe de B à C , ainsi que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees. On supposera que le temps passé entre les Dees est négligeable devant la période du signal.
9. Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m , e et B .
10. En supposant que le proton franchit l'espace entre les Dees lorsque la tension est extrême (et supposée constante pendant le franchissement) avec une vitesse initiale de norme V_i , établir l'expression de V_{i+1} une fois l'espace franchi.
11. Donner l'expression littérale du temps t_E pour que le proton atteigne une énergie cinétique E puis faire l'application numérique pour $E = 1 \times 10^{-12}$ J. Quel est le nombre de tours effectués et la vitesse finale associée?
12. Pour un cyclotron de rayon $R = 0,1$ m, quelle vitesse maximale peut-on obtenir?

