

# Devoir maison n°6

À rendre le **31 janvier 2025**

Ce sujet porte sur l'étude du filtrage d'un créneau par un filtre du premier ordre. Il est composé de 3 page(s). L'intégralité du sujet est à traiter. L'entraide entre élèves est autorisée, la rédaction de la copie reste personnelle.

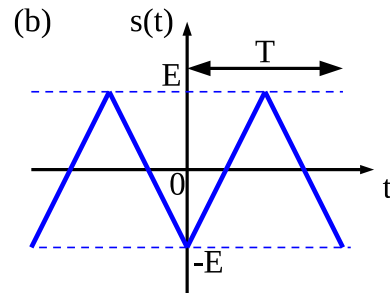
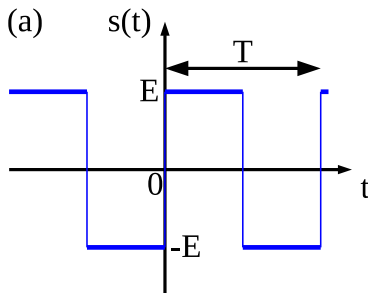
## Rappel :

- ▷ Comme pour tous les devoirs (DS, DM et lors des concours), les réponses doivent être **soulignées ou encadrées** dans une couleur autre que celle de rédaction (rouge par exemple).
- ▷ La numérotation des questions répondues doit clairement apparaître sur la copie.
- ▷ Un saut de ligne doit être clairement observé entre deux questions distinctes.

★   ★   ★

## Formulaire

- ▷ On donne l'expression de la décomposition en série de Fourier de deux signaux qui seront utilisés dans la suite du problème.



Dans le cas du signal créneau représenté en (a), oscillant entre  $\pm E$ , on peut écrire :

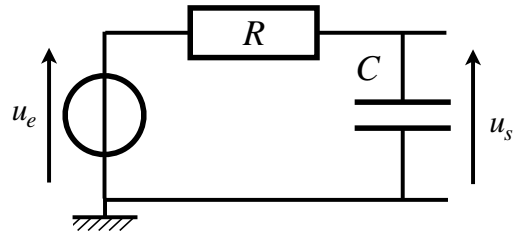
$$s(t) = \sum_{k \text{ impair}} b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \quad \text{avec } b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \\ \frac{4E}{\pi k} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans le cas du signal triangle représenté en (b), oscillant entre  $\pm E$ , on peut écrire :

$$s(t) = \sum_{k \text{ impair}} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \quad \text{avec } a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \\ -\frac{8E}{\pi^2 k^2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

# 1 Généralités

On considère le circuit électrique de la figure ci-contre, où  $u_e(t)$  est une tension sinusoïdale de la forme  $u_e(t) = E \cos(\omega t)$  délivrée par un GBF dont la masse est représentée sur la figure. On se place en régime sinusoïdal forcé.



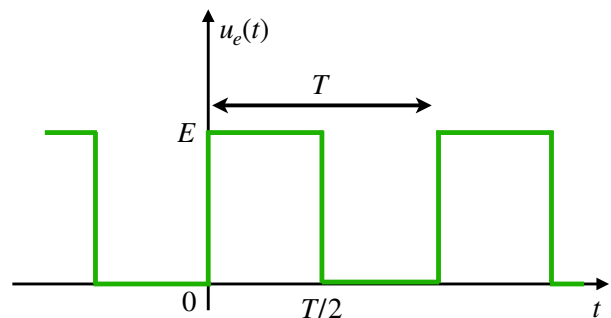
1. Reproduire le schéma sur votre copie et indiquer comment brancher l'oscilloscope pour observer  $u_e(t)$  en voie 1 et  $u_s(t)$  en voie 2. Faut-il un transformateur d'isolement?
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$  sous forme canonique en introduisant une pulsation caractéristique  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ . De quel type de filtre s'agit-il?
3. Donner la forme asymptotique de la fonction de transfert si  $\omega \gg \omega_0$ . Que peut-on dire du comportement du filtre dans ce cas?
4. Sachant que la résistance utilisée est de  $R = 1\text{ k}\Omega$ , déterminer numériquement la valeur de la capacité  $C$  permettant d'obtenir la diagramme de Bode représenté en annexe.

**Dans toute la suite du problème, on gardera ces valeurs pour  $R$  et  $C$ .**

5. Sachant que la fréquence du signal d'entrée est de  $\nu = 100\text{ Hz}$ , exprimer complètement le signal de sortie sous la forme  $\nu_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$  : on exprimera  $U_s$  et on donnera la valeur numérique de  $\varphi$ .
6. Les fréquence du signal d'entrée est maintenant de  $\nu = 8\text{ kHz}$ . En écrivant le signal de sortie sous la forme  $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$ , et en utilisant le diagramme de Bode tracé en annexe, déterminer l'expression de  $U_s$  en fonction de  $E$  et d'une valeur numérique. Donner la valeur numérique de  $\varphi$ . *Application numérique* : Calculer numériquement l'amplitude  $U_s$  si  $E = 5\text{ V}$ .
7. En déduire que pour des fréquences supérieures à  $\nu = 8\text{ kHz}$ , on peut utiliser la forme asymptotique de la fonction de transfert déterminé à la question 3.

# 2 Approche fréquentielle

On considère toujours le même filtre. Le signal d'entrée est maintenant un créneau de fréquence  $\nu = 8\text{ kHz}$  et de période  $T$  représenté sur la figure ci-contre.



8. En s'aidant du formulaire, exprimer le signal  $u_e(t)$  sous la forme d'une décomposition en série de Fourier.
9. En déduire son spectre et le représenter graphiquement sur l'annexe. On fera un graphe approximativement à l'échelle.

10. En utilisant la forme asymptotique adéquate de la fonction de transfert, déterminer l'expression de la décomposition en série de Fourier du signal  $u_s(t)$ . On exprimera les coefficients de Fourier en fonction de  $E$ ,  $T$ ,  $\tau = 1/\omega_0$  et du rang  $k$  de l'harmonique associée.
11. Quelle est la forme du signal  $u_s(t)$  obtenu? On précisera l'expression de sa valeur moyenne ainsi que des valeurs extrêmes  $U_s^{(\min)}$  et  $U_s^{(\max)}$  entre lesquelles il évolue.
12. Sur le graphique de l'annexe représentant  $u_e(t)$ , représenter le signal  $u_s(t)$  à l'échelle. On rappelle que la fréquence du créneau est de  $\nu = 8 \text{ kHz}$ .
13. Commenter les résultats obtenus : on pourra notamment retrouver quantitativement le résultat sans utiliser la décomposition de Fourier explicitement.