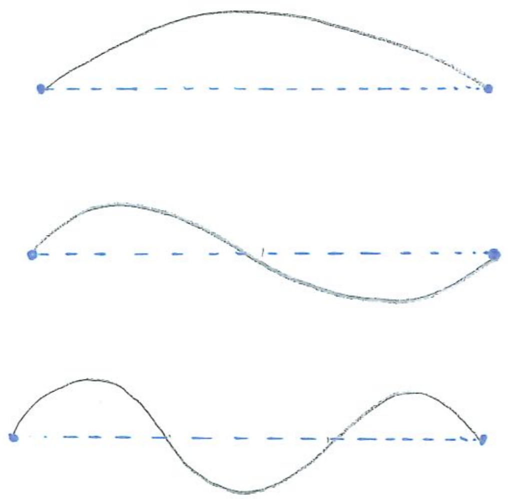
Correction DM5

Exercice 1

1.



ordre 1

ordre 2

ordre 3

2. Pour l'ordre 1, on ne voit qu'une demi longueur d'onde : $L = \frac{\lambda_1}{2}$

Pour l'ordre 2, on voit une longueur d'onde : $L = \lambda_2$

Pour l'ordre 3, on voit une longueur d'onde et demi : $L = 3\frac{\lambda_3}{2}$

Pour l'ordre n, on aurait $L = n\frac{\lambda_n}{2} \Leftrightarrow \underline{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$

3. Comme $f = \frac{c}{\lambda}$ où c la célérité de l'onde, on obtient $\underline{f_n = n\frac{c}{2L}}$

4. Comme la corde est fixée en $x=0$ et $x=L$, on peut dire que l'élongation de la corde en ces points est nulle : $\underline{y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0 \quad \forall t}$

5. Regardons la condition aux limites $y(x=0,t)=0 \quad \forall t$

Cela impose que $A\cos(\omega t+\varphi)\cos(k\times 0+\psi) = 0 \quad \forall t$

donc $\underline{\cos(\psi) = 0}$ car $A\cos(\omega t+\varphi)$ ne peut être constamment nul (sauf si $A=0$, mais il n'y aurait alors plus d'onde)

$\Rightarrow \underline{\psi = \pm\frac{\pi}{2}}$

6. Utilisons maintenant la seconde condition aux limites $y(x=L,t)=0 \ \forall t$

Cela impose $\cos(kL+\psi)=0$

or $\psi=-\frac{\pi}{2}$, donc $\cos(kL-\frac{\pi}{2})=\underline{\sin(kL)=0}$

Cela impose que $\underline{kL=n\times\pi}$, $n\in\mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n}L=n\pi$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda_n=\frac{2L}{n}}$$

On retrouve la même expression qu'à la question 2.

7. Comme $k=\frac{\omega}{c}$ et $k=\frac{n\pi}{L}$

on trouve $\frac{\omega_n}{c}=\frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow \underline{\omega_n=\frac{n\pi c}{L}}$

8. Tout d'abord, remarquons que pour $n=1$, $\omega_1=\frac{\pi c}{L}$

ainsi $\omega_n=n\omega_1$

Finalement $y_n(x,t)=A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ élongation du mode propre de rang n

$$\Leftrightarrow \underline{y_n(x,t)=A_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

9. Intéressons nous au mode de rang n.

* positions des noeuds : ce sont les $x^{(n)}$ tels que $y_n(x^{(n)},t)=0 \ \forall t$

donc $\sin\left(\frac{n\pi x^{(n)}}{L}\right)=0 \Rightarrow \frac{n\pi x_k^{(n)}}{L}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ a priori

$$\Rightarrow \underline{x_k^{(n)}=\frac{k}{n}L}$$

or $x_k^{(n)}\in[0,L]$, donc cela impose $\underline{k\in[\![0,n]\!]}$

On dénombre donc $\underline{n+1 \text{ positions de noeuds}}$.

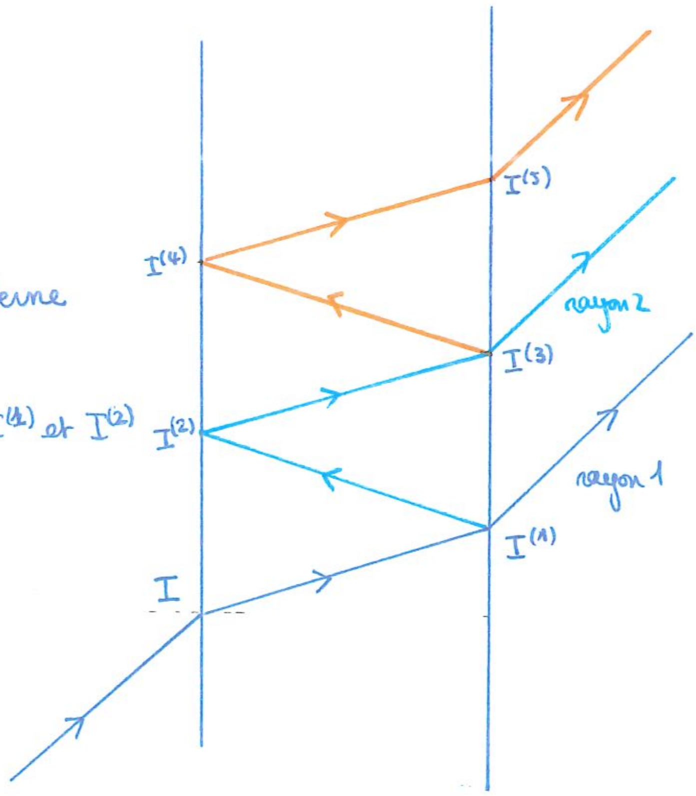
* position des ventres : ce sont les $x^{(v)}$ tels que $y_n(x^{(v)},t)$ soit d'amplitude maximale, donc : $\sin\left(\frac{n\pi x^{(v)}}{L}\right) = \pm 1$

$$\Rightarrow \frac{n\pi x_k^{(v)}}{L} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \text{ a priori}$$

$$\Rightarrow x_k^{(v)} = \frac{2k+1}{2n} L$$

or $x_k^{(v)} \in [0, L]$ impose $k \in [\![0, n-1]\!]$

On dénombre donc n positions de ventres.

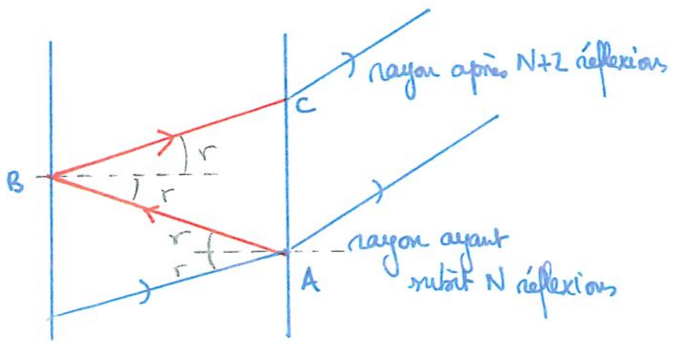


Exercice 2

1. Le rayon 1 ne subit aucune réflexion interne
   Le rayon 2 subit : une transmission en I
   deux réflexions internes en $I^{(1)}$ et $I^{(2)}$
   une transmission en $I^{(3)}$

2. Sur le schéma, on a représenté en orange le rayon émergent en $I^{(5)}$ ayant subit $N=4$ réflexions internes (en $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$ et $I^{(4)}$)

3.



La différence de chemin optique δ entre deux rayons consécutifs correspond à la distance $\delta = (AB + BC)n$ sur le schéma ci-contre.

Or $AB = BC = \frac{e}{\cos r}$ donc $\delta = \frac{2en}{\cos r}$

Le retard associé est $\tau = \frac{\delta}{c} = \frac{2en}{c \cdot \cos r}$

et le déphasage s'exprime donc $\Delta\phi = \frac{\omega}{c}\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta \Rightarrow \Delta\phi = \frac{4\pi n e}{2\cos r \lambda_0}$

⚠ la vitesse de propagation dans la lame est $\frac{c}{n}$.

Rq: on pourrait tout exprimer en fonction de i l'angle d'incidence, avec

$\sin i = n \sin r$ (loi de Snell-Descartes)

et alors $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r} = \sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}$

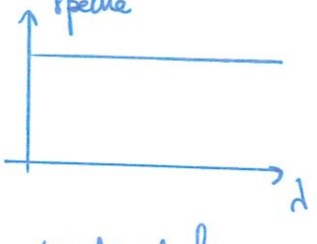
4. On observe des interférences constructives si $\Delta\phi = 2p\pi$, $p\in\mathbb{Z}$

donc $\frac{4\pi n e}{2\cos r \lambda_0} = 2p\pi \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{ne}{p\cos(r)}$, $p\in\mathbb{Z}$

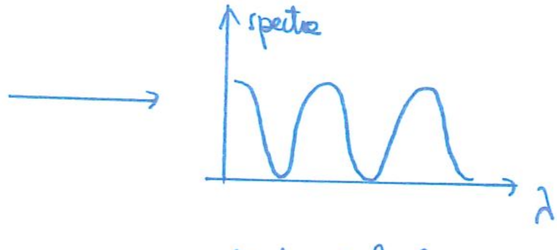
On observe des interférences destructives si $\Delta\phi = (2p+1)\pi$, $p\in\mathbb{Z}$

donc $\lambda_0 = \frac{2ne}{(2p+1)\cos r}$, $p\in\mathbb{Z}$

Ainsi, si l'on envoie de la lumière blanche sur la lame à faces parallèles (avec un certain angle i) certaines longueurs d'onde se retrouvent atténuées en sortie.



spectre de la lumière incidente



spectre de la lumière émergente