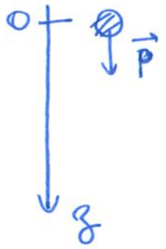
Correction TD 9

Exercice 1



1. Réf : terrestre galiléen
   Système : pierre (supposée ponctuelle)
   BF : poids $\vec{P} = m\vec{g}$

Le PFD appliqué à la pierre dans le réf choisi : $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

projection selon $\vec{e_z}$: $\ddot{z}(t) = g$

$\Rightarrow \dot{z}(t) = gt + 0$ car vitesse initiale nulle

$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ car on choisit l'origine du repère en la position de la pierre au départ.

Ainsi la pierre prend un temps t_c pour atteindre le fond à une profondeur H avec

$$H = \frac{gt_c^2}{2} \Leftrightarrow t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Or le temps que le son produit arrive à la surface, noté t_{son}, est donné par

$$t_{son} = \frac{H}{c}$$

Finalement $T = t_c + t_{son} = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{c}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2H}{g}} = T - \frac{H}{c} \quad \text{donc} \quad \frac{2H}{g} = T^2 - \frac{2HT}{c} + \frac{H^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow H^2 - \left(2Tc + \frac{2c^2}{g}\right)H + c^2T^2 = 0$$

on trouve une éq^n du second degré !

$$H = \frac{\left(2Tc + \frac{2c^2}{g}\right) - \sqrt{\left(2Tc + \frac{2c^2}{g}\right)^2 - 4c^2T^2}}{2}$$

(on garde la solution telle que $H < cT$)

$$= Tc + \frac{c^2}{g} - \sqrt{\frac{2Tc^3}{g} + \frac{c^4}{g^2}}$$

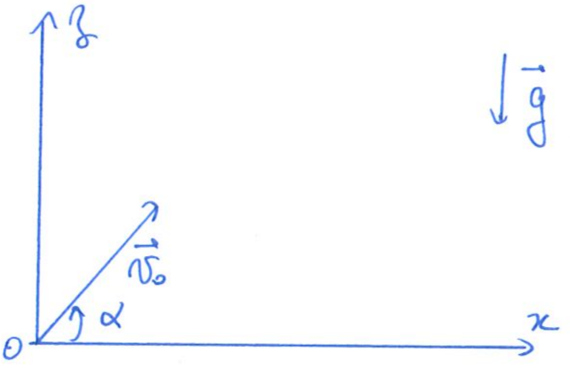
AN : $H \simeq 218\,m$

Exercice 2

1. <u>Réf</u> : terrestre galiléen

<u>Système</u> : fusée assimilée à un point M

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$



choisi comme position initiale du projectile.

Le PFD appliqué à M dans le réf. choisi est :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

Projection dans $(\vec{e_x}, \vec{e_z})$: $\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases}$

en intégrant par rapport au temps $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{z}(t) = -gt + A' \end{cases}$ où $\begin{cases} A = v_0 \cos\alpha \\ A' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$ d'après les C.I.

D'où $\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

En intégrant une seconde fois : $\Rightarrow \begin{cases} \underline{x(t) = v_0 \cos\alpha} \; + 0 \\ \underline{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t} + 0 \end{cases}$ car à $t = 0$, $\begin{cases} x(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire $z = f(x)$, on utilise $x = v_0 \cos\alpha\, t$

$$\Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

alors $z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$

$$\Rightarrow \underline{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha\, x}$$

⊛ La portée est la distance parcourue selon $\vec{e_x}$ lorsque la fusée retombe sur le sol.

Donc $z(x_p) = 0 \iff \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x + \tan\alpha\right) x = 0$

$$\iff \begin{cases} x_p = 0 \quad (\text{c'est lorsque } t = 0) \\ \underline{x_p = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}} \end{cases}$$

À v_0 donnée, la portée est maximale pour un angle α tq : $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha) = 1$

donc pour $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

alors $\underline{x_p^{max} = \frac{v_0^2}{g}}$ AN : $\underline{x_p^{max} = 102 \text{ km}}$

⊛ La hauteur maximale (flèche) est atteinte en x_m tq $\frac{dz}{dx}(x_m) = 0$

Autre méthode : c'est à l'instant t_m tq $\dot{z}(t_m) = 0$

$$\Leftrightarrow -gt_m + v_0\sin\alpha = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

et alors $z_{flèche} = z(t_m) = -\frac{1}{2}gt_m^2 + v_0\sin\alpha\, t_m$

$$= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow \underline{z_{flèche} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$$

À v_0 donnée, la flèche est maximale pour un angle α tq $\sin^2\alpha = 1$
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

on a alors $\underline{z_{flèche}^{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$ AN : $\underline{z_{flèche}^{max} \simeq 51 \text{ km}}$

2. On souhaite qu'à un instant donné t_B : $\begin{cases} x = x_B \\ z = z_B \end{cases}$

or $z(x_B) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_B^2 + \tan\alpha\, x_B = z_B$

or $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1$

d'où $-\frac{g x_B^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha) + x_B\tan\alpha = z_B$

En posant $\delta = \dfrac{g x_B^2}{2 v_0^2}$ et $X = \tan\alpha$

on obtient : $-\delta(1+X^2) + x_B X = z_B$

$$\Rightarrow \quad X^2 - \frac{x_B}{\delta} X + \left(\frac{z_B}{\delta} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_\pm = \frac{\dfrac{x_B}{\delta} \pm \sqrt{\dfrac{x_B^2}{\delta^2} - 4\left(\dfrac{z_B}{\delta}+1\right)}}{2}$$ (les deux solutions sont positives).

$$\Rightarrow \quad X_\pm = \frac{x_B}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{x_B^2}{4\delta^2} - \left(\frac{z_B}{\delta}+1\right)}$$

Il y a deux solutions : $\begin{cases} \alpha_1 = \mathrm{Arctan}\,(X_+) \\ \alpha_2 = \mathrm{Arctan}\,(X_-) \end{cases}$

AN: $\begin{cases} \alpha_1 \approx 61{,}4° \\ \alpha_2 \approx 43{,}6° \end{cases}$

3. Sur le même système et dans le même référentiel que précédemment, nous pouvons faire le bilan des forces : $\rightarrow \vec{P} = m\vec{g}$

$\rightarrow \vec{f} = -h\vec{v} \quad , h > 0$

Le PFD s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + (-h\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{h}{m}\vec{v} = \vec{g}$$ $\leftarrow$ équation différentielle du premier ordre !

Dans la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_z})$, cela donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} = 0 & (*) \\ \ddot{z} + \dfrac{h}{m}\dot{z} = -g & (**) \end{cases}$$

On posera $\tau = \dfrac{m}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0$

La forme générale de la solution est $\dot{x}(t) = Ae^{-t/\tau}$

Or à $t=0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$

D'où $\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \, e^{-t/\tau}$

$(**) \Leftrightarrow \quad \ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} = -g$

La forme générale de la solution est $\dot{z}(t) = Ae^{-t/\tau} + \dot{z}_p$

où $\dot{z}_p$ est la solution particulière constante

ici $\dot{z}_p = -g\tau$

Or à $t=0$, $\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha \Rightarrow A - g\tau = v_0 \sin\alpha$

D'où $\dot{z}(t) = (v_0 \sin\alpha + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau$

Finalement on obtient : $\begin{cases} \underline{\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \, e^{-t/\tau}} \\ \underline{\dot{z}(t) = (v_0 \sin\alpha + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau} \end{cases}$

En intégrant par rapport au temps, on trouve :

$\begin{cases} x(t) = -v_0 \cos\alpha \, \tau e^{-t/\tau} + A \\ z(t) = -(v_0 \sin\alpha + g\tau).\tau e^{-t/\tau} - g\tau.t + A' \end{cases}$ A, A' constantes d'intégration

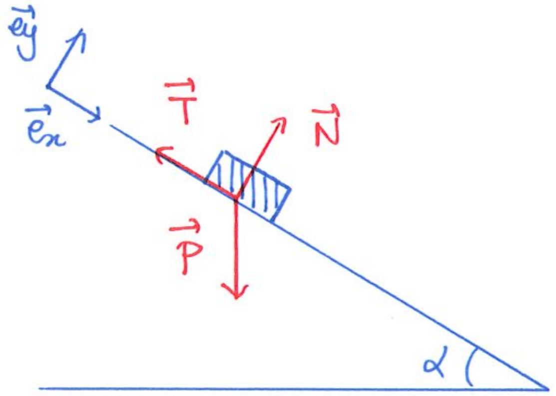
Or à $t=0$, $\begin{cases} x(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -v_0 \cos\alpha \, \tau + A = 0 \\ -(v_0 \sin\alpha + g\tau)\tau + A' = 0 \end{cases}$

Finalement $\begin{cases} \underline{x(t) = v_0 \cos\alpha \, \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \\ \underline{z(t) = (v_0 \sin\alpha + g\tau)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - g\tau t} \end{cases}$

Rq : aux temps longs ($t \gg \tau$), on obtient $\begin{cases} x(t) \approx \text{cste} \\ z(t) \approx \text{cste} - g\tau t \end{cases}$

La fusée chute à vitesse constante verticalement.

Exercice 3



1. Réf : du laboratoire galiléen

Système : brique de masse m

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{N}$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la brique dans le réf. du labo. galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$

Projections : $\vec{T} = -T\vec{e_x}$
$\vec{N} = N\vec{e_y}$
$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$

Hypothèse : la brique est en équilibre

donc $\vec{a} = \vec{0}$

alors $\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = \vec{0}$

Projection :
$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : mg\sin\alpha - T = 0 \\ \text{selon } \vec{e_y} : -mg\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Il n'y a pas de glissement tant que : $T < \mu_0 N$

donc que $mg\sin\alpha < \mu_0\, mg\cos\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha < \mu_0$

$\Leftrightarrow \alpha < \alpha_0$

avec $\alpha_0 = \mathrm{Arctan}(\mu_0)$

2. Nouvelle hypothèse : il y a glissement

alors $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$ (pas de mouvement selon $\vec{e_y}$)

et on obtient
$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : mg\sin\alpha - T = m\ddot{x} \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_z} : -mg\cos\alpha + N = 0 \quad (**) \end{cases}$$

(**) donne : $N = mg\cos\alpha$

Or tant qu'il y a glissement, $T = \mu N$

alors (*) devient : $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

en intégrant par rapport à t : $\dot{x} = g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)t + A$

constante d'intégration

or à $t=0$, $\dot{x}(0) = 0$
(vitesse initiale nulle)

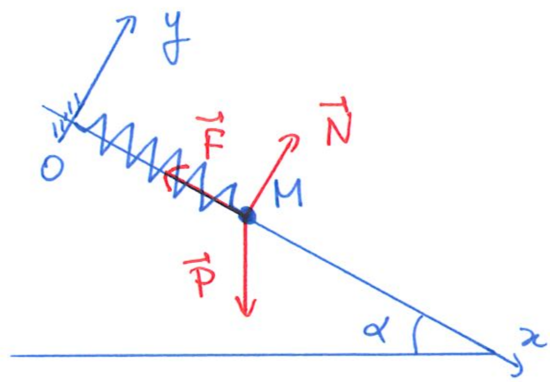
donc $\dot{x} = g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)t$

enfin, en intégrant une nouvelle fois : $x(t) = \frac{g\cos\alpha}{2}(\tan\alpha - \mu)t^2 + 0$

car à $t=0$, on suppose que la brique est en O.

Le mobile a alors un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Exercice 4



1. Réf : du laboratoire galiléen

Système : masse m

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}$

force de rappel du ressort

réaction du support

Ici on ne considère pas de frottements.

On applique le PFD à la masse dans le réf. du laboratoire galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

Projection des forces : $\vec{N} = N\vec{e_y}$, $\vec{F} = -k(x-l_0)\vec{e_x}$

$$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$$

On suppose qu'il y a équilibre, donc $\vec{a} = \vec{0}$.

alors $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$ (les forces se compensent)

projection : $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : & mg\sin\alpha - k(x-l_0) = 0 \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_y} : & N - mg\cos\alpha = 0 \quad (**) \end{cases}$

$(*)$ devient alors $mg\sin\alpha = k(x_e - l_0)$

$$\Rightarrow \underline{x_e = \frac{mg\sin\alpha}{k} + l_0}$$

À l'équilibre, le point M est en x_e. Le ressort n'est pas au repos (il est légèrement étiré).

2. Maintenant, on ne considère pas que $\vec{a} = \vec{0}$,

alors $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$ (pas de mouvement selon $\vec{e_y}$)

Et l'équation $(*)$ devient : $mg\sin\alpha - k(x-l_0) = m\ddot{x}$

($(**)$ reste inchangée, elle correspond à l'équilibre selon $\vec{e_y}$)

et alors $m\ddot{x} + kx = mg\sin\alpha + kl_0 = k\left(\frac{mg\sin\alpha}{k} + l_0\right) = kx_e$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_e$ en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on trouve :

$$\underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e}$$

on trouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

La solution s'écrit : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \underbrace{x_e}_{\text{sol. particulière cste !}}$

Or à $t=0$, $x(0) = x_e + d$

car M est déplacé de d par rapport à x_e

$\dot{x}(0) = 0$ car lâché sans vitesse initiale.

Donc $\begin{cases} x(0) = A + x_e = x_e + d & \Rightarrow A = d \\ \dot{x}(0) = B\omega_0 = 0 & \Rightarrow B = 0 \end{cases}$

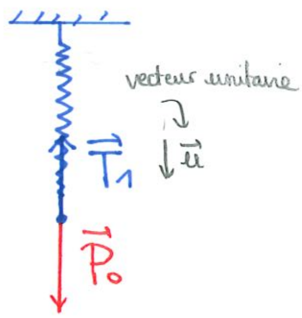
Enfin : $\underline{x(t) = d\cos(\omega_0 t) + x_e}$

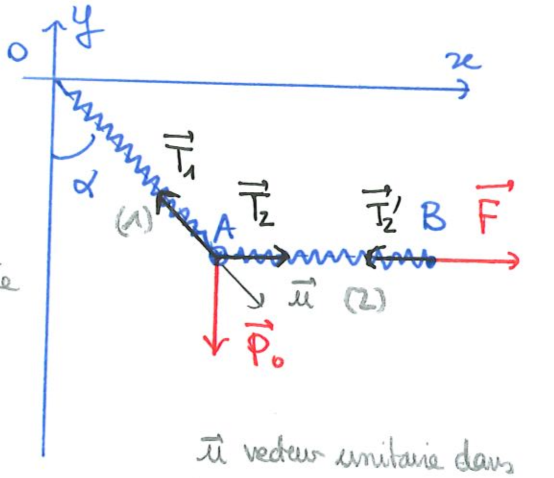
M oscille à la pulsation ω_0 autour de la position d'équilibre x_e.

Exercice 5

- Tout d'abord, il faut traduire l'énoncé concernant l_0 :

lorsque le ressort est soumis au poids P_0, alors le ressort s'allonge de l_0 (par rapport à sa longueur à vide).





$\vec{u}$ vecteur unitaire dans la direction du ressort (1)

à l'équilibre : $\vec{T_1} + \vec{P_0} = \vec{0}$

or $\vec{T_1} = -kl_0\vec{u}$ et $\vec{P_0} = P_0\vec{u}$

D'où $-kl_0 + P_0 = 0 \Leftrightarrow \underline{l_0 = \frac{P_0}{k}} \Leftrightarrow \underline{P_0 = kl_0}$

- Faisons le bilan des forces sur A :
  - $\vec{P_0} = -P_0\vec{e_y}$
  - $\vec{T_1} = -kl_1\vec{u}$ (force du ressort 1 sur A)
  - $\vec{T_2} = +kl_2\vec{e_x}$ (force du ressort 2 sur A)

or $\vec{u} = \sin\alpha\,\vec{e_x} - \cos\alpha\,\vec{e_y}$, d'où $\vec{T_1} = -kl_1(\sin\alpha\,\vec{e_x} - \cos\alpha\,\vec{e_y})$

* PFD appliqué à A dans le réf. du laboratoire galiléen :

à l'équilibre : $\vec{P_0} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$

projection : $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : & +kl_2 - kl_1 \sin\alpha = 0 \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_y} : & -P_0 + kl_1 \cos\alpha = 0 \quad (**) \end{cases}$

(**) permet d'obtenir l'équilibre selon $\vec{e_y}$. C'est grâce au ressort (1) que l'équilibre est obtenu selon $\vec{e_y}$:

$$P_0 = kl_1 \cos\alpha \Leftrightarrow l_1 = \frac{P_0}{k\cos\alpha} = \frac{l_0}{\cos\alpha}$$

(*) permet d'obtenir l'équilibre selon $\vec{e_x}$:

$$kl_2 = kl_1 \sin\alpha \Leftrightarrow l_2 = l_1 \sin\alpha = l_0 \tan\alpha$$

Rq : en $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, l_1 et l_2 divergent (problématique du fil à linge)

Rq : il est possible d'avoir une expression de la force F. Pour cela il faut appliquer le PFD au point B.

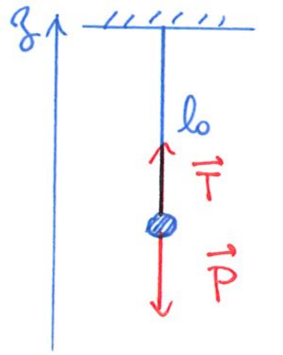
Bilan des forces sur B : $\to \vec{T_2}' = -kl_2 \vec{e_x}$

↑ c'est le même allongement du ressort (2)

$\to \vec{F} = F\vec{e_x}$

alors le PFD à l'équilibre donne $\vec{T_2}' + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F = kl_2 = kl_0 \tan\alpha$

Exercice 6



1. Réf : terrestre galiléen

Système : pierre assimilée à un point

Bilan des forces : - $\vec{P} = m\vec{g}$ poids

- $\vec{T}$ tension du fil

À l'équilibre, $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$ et $\vec{T} = T\vec{e_z}$

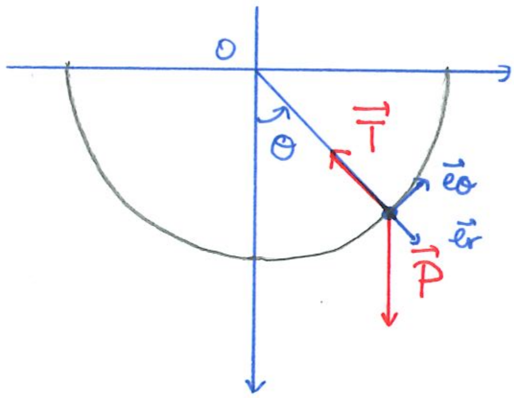
Le PFD appliqué à la pierre dans le référentiel terrestre galiléen donne à l'équilibre :

$$m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T}$$

projeté selon $\vec{e_z}$: $\quad -mg + T = 0 \Rightarrow \underline{T = mg}$

2. On garde le même réf. et système.

On utilise un système de coordonnées polaires (avec la base $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$)



Les forces qui s'appliquent sont toujours $\vec{P}$ et $\vec{T}$

* Dans la base : $\begin{cases} \vec{T} = -T\vec{e_r} \\ \vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta} \end{cases}$

* Projection du vecteur accélération : on repart de $\vec{OM} = l_0\vec{e_r}$

alors $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = l_0\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = l_0\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

et $\vec{a} = l_0\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - l_0\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

* PFD appliqué à la pierre dans le réf. terrestre galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

projection : $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_r} : & -ml_0\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_\theta} : & ml_0\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (**) \end{cases}$

Lorsque $\theta = 0$: d'après l'énoncé, $T = 3mg$

alors $(*)$ s'écrit $-ml_0\dot{\theta}^2 = -3mg + mg\underbrace{\cos\theta}_{=1}$

or $\|\vec{v}\| = l_0|\dot{\theta}| \Rightarrow l_0\dot{\theta}^2 = \dfrac{v_0^2}{l_0}$

d'où $\dfrac{v_0^2}{l_0} = 2g \Rightarrow \underline{v_0 = \sqrt{2gl_0}}$

Pour un θ quelconque : $(**) \times \dot{\theta}$ s'écrit :

$$m l_0 \ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta . \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow m l_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = -mg\frac{d}{dt}(-\cos\theta)$$

Donc : $\frac{1}{2} l_0 \dot{\theta}^2 = g\cos\theta + K$, K cste

or cette expression est valable pour tout θ.

en particulier, à $\theta = 0$, $l_0 \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{l_0}$

d'où $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{l_0} = g + K \Rightarrow K = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{l_0} - g = \frac{1}{2}\cdot\frac{2gl_0}{l_0} - g = 0$

Ainsi en tout point : $\frac{1}{2} l_0 \dot{\theta}^2 = g\cos\theta$

Quel est le point le plus haut atteint ?

Au point le plus haut, la vitesse de la pierre est nulle.

Donc c'est l'angle θ tel que $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$ pour $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$

Lorsque $\theta = \theta_{max}$: alors $v_1 = 0$

et $T_1 = mg\cos\theta + m l_0 \dot{\theta}^2$ d'après $(*)$

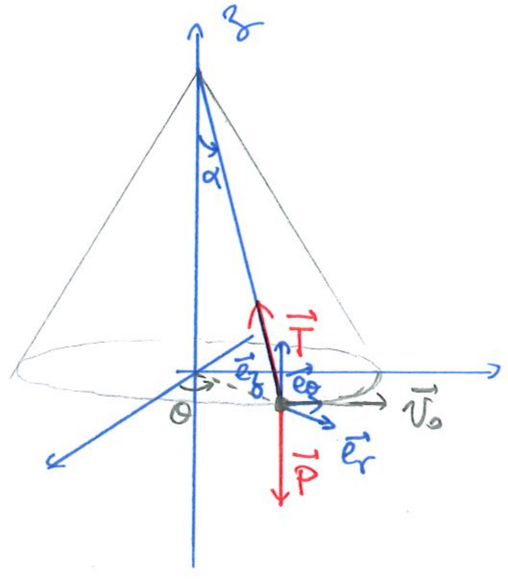
$\Rightarrow T_1 = 0$ car $\dot{\theta} = 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

3. Réf : terrestre galiléen

Syst : pierre de masse m

Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{T}$

Base choisie : base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$



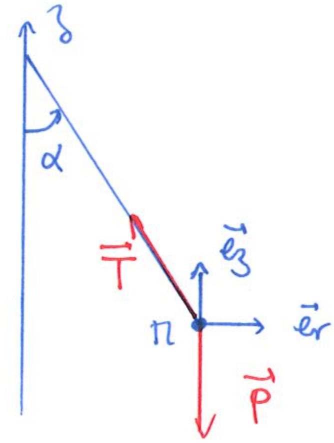
Projection forces : $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$

$\vec{T} = -T\sin\alpha\,\vec{e_r} + T\cos\alpha\,\vec{e_z}$

Projection de l'accélération :

$\vec{OM} = r_0 \vec{e_r} + z_0 \vec{e_z}$

r_0 et z_0 constants d'après l'énoncé
(mouvement circulaire et horizontal)



Vue dans le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = r_0 \dot{\theta} \vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{r_0 \ddot{\theta}}_{=0} \vec{e_\theta} - r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e_r}$$

$=0$ car la vitesse est constante !
(mouvement uniforme)

Application du PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

projections $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_r} : -m r_0 \dot{\theta}^2 = -T \sin\alpha \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_z} : \quad 0 = -mg + T\cos\alpha \quad (**) \end{cases}$

Or $\|\vec{v}\|$ cste $\Rightarrow r_0 \dot{\theta} = v_0 = $ cste

et $(**)$ donne $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, on injecte dans $(*)$ et : $-m\dfrac{v_0^2}{r_0} = -\dfrac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{r_0} = g\tan\alpha \Rightarrow \underline{\tan\alpha = \frac{v_0^2}{r_0 g}}$$

Déterminons T :

on a $\begin{cases} T\sin\alpha = m\dfrac{v_0^2}{r_0} \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$

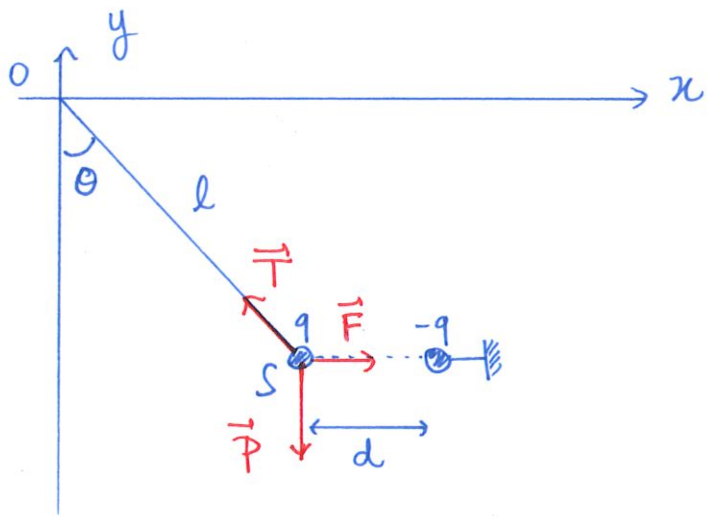
D'où $T^2 = T^2\sin^2\alpha + T^2\cos^2\alpha = \left(\dfrac{m v_0^2}{r_0}\right)^2 + (mg)^2$

$$\Rightarrow T = \sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2 v_0^4}{r_0^2}} = \underline{mg\sqrt{1 + \frac{v_0^4}{r_0^2 g^2}}}$$

Rq : $T > mg$

<u>Morale de l'exercice</u> : la norme de T peut prendre différentes valeurs en fonction des situations !

Exercice 7



Réf : terrestre galiléen

Système : sphère S, de masse m

Bilan des forces : $\vec{P}$ poids

$\vec{T}$ tension du fil

$\vec{F}$ force d'interaction électrostatique de la charge $-q$ sur S

Projection des forces : $\vec{P} = -mg\,\vec{e_y}$

$$\vec{T} = -T\sin\theta\,\vec{e_x} + T\cos\theta\,\vec{e_y}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\times(-q)}{d^2}\underbrace{\vec{u}_{-q\to q}}_{=-\vec{e_x}}$$

$$= +\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{e_x}$$

On applique le PFD à S dans le réf. terrestre galiléen :

à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$

projection : $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : -T\sin\theta + \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 0 & (*) \\ \text{selon } \vec{e_y} : -mg + T\cos\theta = 0 & (**) \end{cases}$

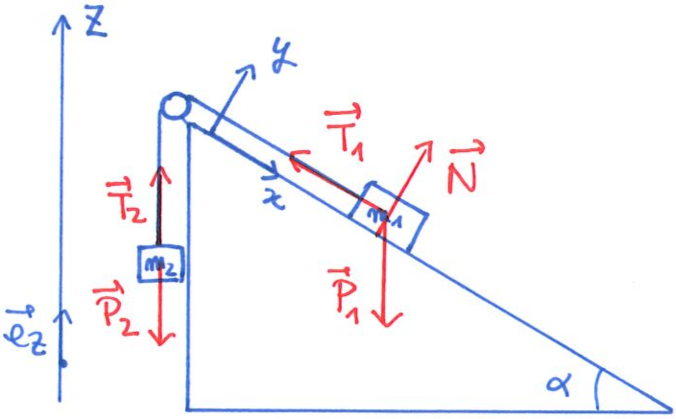
T est inconnu a priori, mais grâce à $(**)$ on a : $T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

et alors $(*)$ devient $-\dfrac{mg}{\cos\theta}\sin\theta + \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = mg\tan\theta \quad \text{donc} \quad q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg\tan\theta}$$

AN : $q \simeq 1{,}31\times10^{-6}\,C$

Exercice 8



1. Intéressons nous d'abord à la masse m_1

Bilan des forces sur m_1

→ poids $\vec{P_1} = m_1\vec{g}$
→ tension du fil $\vec{T_1}$
→ réaction du support $\vec{N}$
(pas de réaction tangentielle, car pas de frottements)

Alors le PFD appliqué à m_1 dans le réf. du laboratoire galiléen donne :

$$m_1\vec{a_1} = \vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{N}$$

* projection de $\vec{a_1}$: comme le mouvement se fait uniquement selon l'axe $\vec{e_x}$,
alors $\vec{a_1} = \ddot{x}_1\,\vec{e_x}$, $x_1(t)$ position de la masse m_1 au cours du temps.

* projection des forces :

$$\vec{P_1} = m_1 g \sin\alpha\,\vec{e_x} - m_1 g\cos\alpha\,\vec{e_y}$$
$$\vec{T_1} = -T_1\,\vec{e_x}$$
$$\vec{N} = N\,\vec{e_y}$$

* projection du PFD :

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : & m_1\ddot{x}_1 = m_1 g\sin\alpha - T_1 \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_y} : & 0 = -m_1 g\cos\alpha + N \quad (**) \end{cases}$$

Maintenant appliquons le même raisonnement pour m_2 :

Astuce : au lieu de s'embêter à utiliser le même repère que pour étudier la masse m_1, j'introduis un axe Z indépendant, de vecteur unitaire $\vec{e_Z}$.

Bilan des forces sur m_2

→ poids : $\vec{P_2} = m_2\vec{g}$
→ tension du fil : $\vec{T_2}$

Alors le PFD appliqué à la masse m_2 dans le réf. terrestre galiléen donne :

$$m_2\vec{a_2} = \vec{P_2} + \vec{T_2}$$

* projection $\vec{a}_2$: m_2 se déplace uniquement selon $\vec{e}_z$:

$\vec{a}_2 = \ddot{z}\,\vec{e}_z$, où $z(t)$ est l'altitude du point m_2 au cours du temps.

* projection des forces : $\vec{P}_2 = -m_2 g\,\vec{e}_z$

$\vec{T}_2 = T_2\,\vec{e}_z$

* projection du PFD : selon $\vec{e}_z$: $m_2\ddot{z} = -m_2 g + T_2$ $(***)$

Or la tension du fil étant la même le long d'un fil : $T_1 = T_2 = T$

$(*)$ et $(***)$ s'écrivent $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g\sin\alpha - T \\ m_2\ddot{z} = -m_2 g + T \end{cases}$

en sommant les deux : $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{z} = m_1 g\sin\alpha - m_2 g$ (a)

Il manque une seconde équation pour déterminer $\ddot{x}_1$ et $\ddot{z}$! Nous n'avons pas encore écrit la condition d'inextensibilité du fil.

Cela a pour conséquence que la vitesse de m_1 selon $\vec{e}_x$ sera égale à la vitesse de m_2 selon $\vec{e}_z$.

On peut l'expliquer en écrivant que :

si m_1 se déplace de dx_1 selon $\vec{e}_x$

alors m_2 se déplace de dz selon $\vec{e}_z$

tel que $dz = dx_1$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt}$

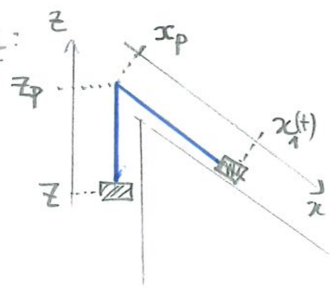
$\Rightarrow \dot{z} = \dot{x}_1$ et donc $\ddot{z} = \ddot{x}_1$ (b)

Ainsi, avec (b), (a) s'écrit :

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1\sin\alpha - m_2)g$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{z} = \frac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}\,g$$

Autre preuve :



Notons L la longueur du fil

et z_p position de la poulie selon (Oz)

x_p ——— (Ox)

alors $L = \underbrace{(z_p - z)}_{\text{longueur du fil selon } \vec{e}_z} + \underbrace{(x_1 - x_p)}_{\text{longueur du fil selon } \vec{e}_x}$

Or le fil est inextensible, donc

$L = $ cste

$\Rightarrow \dfrac{dL}{dt} = 0 \iff -\dot{z} + \dot{x}_1 = 0$

$\iff \dot{z} = \dot{x}_1$

Donc si $m_1 \sin\alpha > m_2$, $\ddot{x}_1$ et $\ddot{z} > 0$

(la masse m_2 remonte, et la masse m_1 descend la pente)

si $m_2 > m_1 \sin\alpha$, $\ddot{x}_1$ et $\ddot{z} < 0$

(la masse m_2 descend et la masse m_1 remonte la pente)

2. Prenons par exemple (***) et injectons l'expression de $\ddot{z}$ déterminée :

$$m_2 \left(\frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} g \right) = -m_2 g + T$$

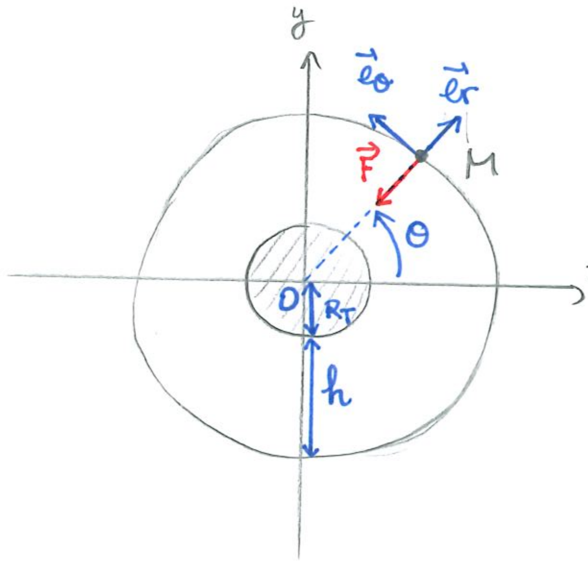
$$\Rightarrow \quad T = m_2 g \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} + m_2 g$$

$$= m_2 g \left(\frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} + 1 \right)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin\alpha)$$

3. L'équation (**) donne directement : $N = m_1 g \cos\alpha$

Exercice 9



1. Voir schéma ci-contre.

Rq : ⚠ $\vec{e_\theta}$ toujours dans le sens des θ croissants

2. $\overrightarrow{OM} = (R_T + h)\vec{e_r}$

En dérivant par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R_T + h)\vec{e_r}\right] = (R_T + h)\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (R_T + h)\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

3. En dérivant $\vec{v}$: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R_T + h)\dot{\theta}\vec{e_\theta}\right] = (R_T + h)\left(\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{e_r}\right)$

4. Réf : géocentrique galiléen

Système : satellite M

Bilan des forces : $\vec{F}$ force d'interaction gravitationnelle

où $\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m.M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{e_r}$

Le PFD s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F}$

PFD projeté :
$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_r} : & -m(R_T+h)\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\dfrac{mM_T}{(R_T+h)^2} \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_\theta} : & m(R_T+h)\ddot{\theta} = 0 \quad (**) \end{cases}$$

L'équation (**) donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cste}$

Le satellite a une vitesse de rotation constante.

Or $\|\vec{v}\| = (R_T+h)|\dot{\theta}| = \text{cste}$

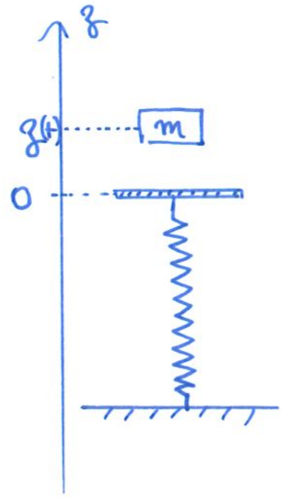
Donc le mouvement est uniforme.

5. Utilisons l'équation (*) : $(R_T+h)\dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$

or $(R_T+h)\dot{\theta}^2 = \dfrac{v^2}{(R_T+h)}$

d'où $\dfrac{v^2}{R_T+h} = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}}$

Exercice 10



Tout d'abord analysons la situation.

→ si $z(t) > 0$, la masse m n'est pas soumise à la tension du ressort.

→ si $z(t) < 0$, la masse comprime le ressort, et le ressort exercera une tension sur la masse en réponse.

De plus, si la masse du plateau est nulle, cela signifie que le ressort est au repos avant le contact avec la masse.

Réf : terrestre galiléen

Système : masse m

Bilan des forces : - poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

- tension du ressort : $\vec{T} = \vec{0}$ si $z(t) > 0$

$= -kz(t)\vec{e_z}$ si $z(t) < 0$

⊛ Initialement, il n'y a pas contact, $z(t=0) = h > 0$

la masse est en chute libre : PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$

selon $\vec{e_z}$: $m\ddot{z} = -mg$, donc $\ddot{z} = -g$

en intégrant : $\dot{z}(t) = -gt + A$, avec $A = 0$ car la vitesse initiale est nulle

$= -gt$

en intégrant : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + A'$, or $z(0) = h$, donc $A' = h$

et $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

Quand atteint-il le plateau ? lorsque $z(t_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}gt_0^2 = h$

$\Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

la masse aura alors atteint la vitesse $\dot{z}(t_0) = -gt_0 = -\sqrt{2gh}$

⊛ À partir de t_0 :

Pour simplifier les calculs, choisissons t_0 comme nouvelle origine des temps.

Le PFD donne : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

selon $\vec{e_z}$: $m\ddot{z} = -mg - kz \Leftrightarrow m\ddot{z} + kz = -mg$

$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$

on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, et on obtient : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g$

On obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique !

alors $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_P$

z_p est la solution particulière constante. Ici, $z_p = -\frac{g}{\omega_0^2} = -\frac{mg}{k}$

Déterminons A et B avec les conditions initiales :

* $z(0) = 0$ Or $z(0) = A - \frac{mg}{k} = 0$, d'où $A = \frac{mg}{k}$
* $\dot{z}(0) = -\sqrt{2gh}$ Or $\dot{z}(0) = \omega_0 B$, d'où $B = -\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = -\sqrt{\frac{2mgh}{k}}$

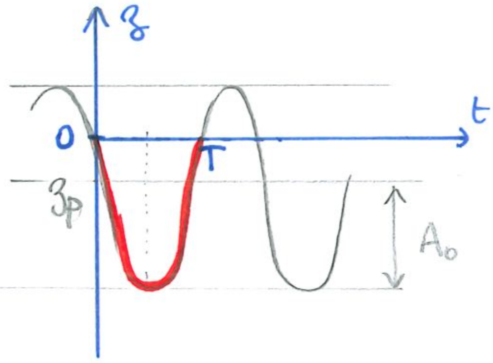
Finalement : $z(t) = \frac{mg}{k}\left(\cos(\omega_0 t) - 1\right) - \sqrt{\frac{2mgh}{k}} \sin(\omega_0 t)$

La masse a alors un mouvement d'oscillation autour de $z_p = -\frac{mg}{k}$.

Rq : l'amplitude des ces oscillations est $A_0^2 = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2mgh}{k}}\right)^2$

$$= \frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k} = \frac{mg}{k}\left(\frac{mg}{k} + 2h\right)$$

Donc la masse descend jusqu'à atteindre un altitude minimale z_{min} ($z_{min} = z_p - A_0$) avant de repartir vers le haut



La solution n'est valable que si la masse est en contact avec le ressort.

Or à un instant T, où $z(t)$ atteint la valeur de 0 (voir courbe), la masse décolle.

À cet instant $z(T) = 0$ et $\dot{z}(T) = \sqrt{2gh}$

soit utiliser approche énergétique
soit dire que par symétrie de la fonction $z(t)$ par rapport à l'instant $T/2$, les pentes des tangentes en $t=0$ et $t=T$ sont les mêmes au signe près !

* À partir de $t_0 + T$:

On prend de nouveau une nouvelle origine des temps.

Or la masse est alors en chute libre (soumise uniquement au poids) alors $\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z}(t) = -gt + \sqrt{2gh}$

car initialement (à la nouvelle origine des temps) $\dot{z}(0) = \sqrt{2gh}$

et alors $z(t) = -g\frac{t^2}{2} + \sqrt{2gh}\, t + 0$

car à $t=0$, $z=0$

La masse monte jusqu'à une hauteur maximale où $\dot{z} = 0$

donc lorsque $-gt + \sqrt{2gh} = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_0$

et l'altitude maximale est alors $z_{max} = z(t_0) = -\frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 + \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2h}{g}} = h$

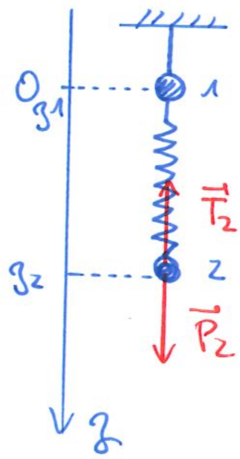
On retrouve les mêmes conditions que les conditions initiales du problème !

la masse est en h sans vitesse initiale.

$\Rightarrow$ tout le mouvement se répète !

Exercice 11

1. Initialement, la masse 1 est en O (par définition du point O) donc $z_1 = 0$



Déterminons la position de z_2 dans cette situation.

Système : masse m (2)

Réf : terrestre galiléen

Bilan des forces : $\vec{P_2} = m\vec{g}$ poids

$\vec{T_2} = -k(l - l_0)\vec{e_z}$ tension du ressort

Or ici $l = z_2 - z_1 = z_2$ car $z_1 = 0$

PFD à l'équilibre ($\vec{a} = \vec{0}$) : $\vec{0} = \vec{P_2} + \vec{T_2}$

selon $\vec{e_z}$: $mg - k(z_2 - l_0) = 0$

Donc $z_2 = \frac{mg}{k} + l_0 = \frac{mg}{k}$ car on suppose l_0 nulle.

2. À partir du bilan des forces s'exerçant sur la masse 2 de la question précédente, on peut écrire le PFD (hors équilibre) :

$$m\vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 \qquad \text{or} \qquad \vec{a}_2 = \ddot{z}_2 \vec{e}_z$$

donc selon $\vec{e}_z$: $\underline{m\ddot{z}_2 = mg - k(z_2 - z_1)}$ (1)

<u>Étudions la masse 1</u> :

(pas de tension de fil, car coupé)

Bilan des forces : - $\vec{P}_1$: poids, $\vec{P}_1 = m\vec{g}$

- $\vec{T}_1$: tension du ressort, $\vec{T}_1 = -k(z_2 - z_1)(-\vec{e}_z)$

Le PFD s'écrit donc $m\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T}_1$

projeté selon $\vec{e}_z$: $\underline{m\ddot{z}_1 = mg + k(z_2 - z_1)}$ (2)

On pose $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$ et $l = z_2 - z_1$

$$\ddot{z} = \frac{\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2}{2}$$

(1) + (2) donne : $m(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = 2mg \iff 2m\ddot{z} = 2mg$

$$\iff \underline{\ddot{z} = g} \quad (*)$$

Rq : $z(t)$ est défini comme la position du centre d'inertie du système {masse 1 + masse 2}

L'équation (*) est le PFD appliqué au centre d'inertie du système ! Comme la seule force extérieure qui s'applique au système est le poids, alors le centre d'inertie a bien un mouvement de chute libre.

(1) − (2) donne : $m(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = -k(z_2 - z_1) - k(z_2 - z_1)$

or $\ddot{l} = \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1$, d'où $m\ddot{l} = -2kl$

$$\Rightarrow \ddot{l} + \frac{2k}{m} l = 0$$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}$, alors $\underline{\ddot{l} + \omega_0^2 l = 0}$ (**)

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique !

3. Résolvons d'abord les équations différentielles obtenues :

- $\ddot{z} = g$: - en intégrant : $\dot{z}(t) = gt + A$

or initialement $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = 0$ (vitesse nulle)

donc $A = 0$

- en intégrant : $z(t) = \frac{gt^2}{2} + A'$

or à $t=0$, $z(0) = \frac{z_1(0) + z_2(0)}{2}$ avec $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \frac{mg}{k}$

Donc $A' = \frac{mg}{2k}$

et $z(t) = \frac{gt^2}{2} + \frac{mg}{2k}$

- $\ddot{\ell} + \omega_0^2 \ell = 0$: la solution est $\ell(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

or à $t=0$: $\ell(0) = z_2(0) - z_1(0) = \frac{mg}{k}$

et $\dot{\ell}(0) = \dot{z}_2(0) - \dot{z}_1(0) = 0$

et $\begin{cases} \ell(0) = A \Rightarrow A = \frac{mg}{k} \\ \dot{\ell}(0) = B\omega_0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$ d'où $\ell(t) = \frac{mg}{k}\cos(\omega_0 t)$

Finalement comme $\begin{cases} z = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \ell = z_2 - z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = z + \ell/2 \\ z_1 = z - \ell/2 \end{cases}$

et $\begin{cases} z_1(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{mg}{2k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right) \\ z_2(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{mg}{2k}\left(1 + \cos(\omega_0 t)\right) \end{cases}$

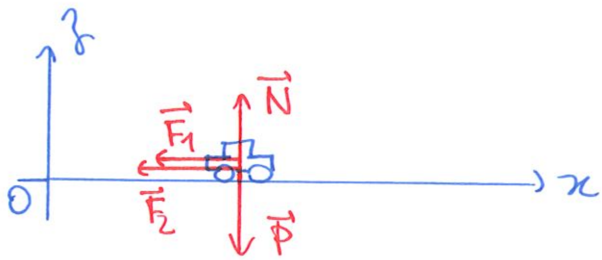
Rq : on peut montrer que pour des temps courts tel que $\omega_0 t \ll 1$

$\cos(\omega_0 t) \simeq 1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2}$ alors $z_1(t) \approx \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = gt^2$ → la masse 1 chute alors que la masse 2 reste immobile !

en se limitant à l'ordre 3 du développement.

$z_2(t) \approx \frac{gt^2}{2} - \frac{gt^2}{2} \simeq 0$

Exercice 12



1. Réf : terrestre galiléen

Système : voiture de masse m

Bilan des forces : - poids $\vec{P}$

- réaction du support : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F_1}$
- frottements fluides $\vec{F_2}$

On suppose que la voiture se déplace selon $\vec{v} = v\,\vec{e_x}$, $v > 0$

alors $\vec{F_2}$ selon $-\vec{v}$ et $\vec{F_1}$ également.

Appliquons le PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$

projection des forces : $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$

$\vec{N} = N\vec{e_z}$

$\vec{F_1} = -F_1\,\vec{e_x}$

$\vec{F_2} = -\dfrac{1}{2}\rho C_x S v^2\,\vec{e_x}$

projection du PFD :
$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} : & m\dfrac{dv}{dt} = -F_1 - \dfrac{1}{2}\rho C_x S v^2 \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_z} : & 0 = N - mg \quad (**) \end{cases}$$

* Or tant que la voiture roule ($v \neq 0$), alors $F_1 = \mu N$ (loi de Coulomb)

et (**) donne $N = mg$, donc $F_1 = \mu mg$

finalement $\vec{F_1} = -\mu mg\,\vec{e_x} = -m\alpha\vec{e_x}$ avec $\alpha = \mu g$

* et $\vec{F_2} = -\dfrac{1}{2}\rho C_x S v^2\vec{e_x} = -m\beta v^2\,\vec{e_x}$ avec $\beta = \dfrac{\rho C_x S}{2m}$

AN : $\alpha = 0{,}196\,m.s^{-2}$

$\beta = 9{,}75 \times 10^{-4}\,m^{-1}$

2. Reprenons l'équation (*). Elle s'écrit :

$$m\frac{dv}{dt} = -m\alpha - m\beta v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\alpha - \beta v^2$$

L'équation différentielle est non-linéaire, mais on peut utiliser la méthode de séparation des variables :

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha - \beta v^2$$

$$\Rightarrow dv = (-\alpha - \beta v^2)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\alpha + \beta v^2} = -dt$$

Intégrons entre $t=0$ et un temps t quelconque, $t>0$:

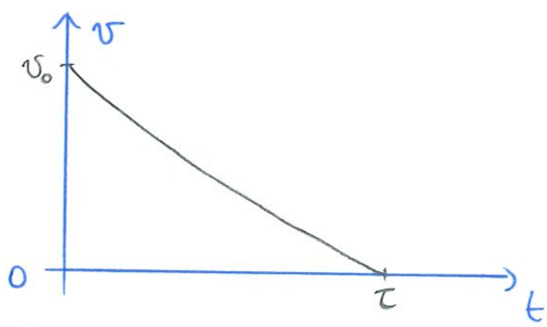
$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{\alpha+\beta v^2} = -\int_0^t dt \Rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{\alpha}\frac{dv}{1+\frac{\beta}{\alpha}v^2} = -\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v\right)\right]_{v(0)}^{v(t)} = -t$$

Finalement : $$\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v(t)\right) - \underbrace{\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)}_{\text{on pose } \phi_0 = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)} = -\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}t = -\sqrt{\alpha\beta}\,t$$

d'où $$\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v(t)\right) = \phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\,t$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tan\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\,t\right)$$



Contrairement à une exponentielle décroissante, la vitesse s'annule au bout d'un temps fini τ tq $\tan(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\,\tau) = 0 \Leftrightarrow \phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\,\tau = 0$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{\phi_0}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

AN : ⚠ à calculer ϕ_0 en radians

$\tau \simeq 69\,s$

Connaissant $v(t)$, on détermine $x(t)$ en intégrant $v(t)$.

On choisit $x(0)=0$, alors :

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tan\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\, t\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tan\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\, t\right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left(\cos\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\, t\right)\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[\ln\left(\cos\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\, t\right)\right) - \ln\left(\cos\phi_0\right)\right]$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\cos\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\, t\right)}{\cos\phi_0}\right)}$$

La distance parcourue correspond à $x(\tau)$:

$$d = x(\tau) = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\cos\left(\phi_0 - \sqrt{\alpha\beta}\cdot\frac{\phi_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)}{\cos\phi_0}\right) = \underline{\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1}{\cos\phi_0}\right)}$$

Rq: comme $\phi_0 = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, v_0\right)$, on peut transformer le $\cos\phi_0$ en $\tan\phi_0$

$$d = \frac{1}{2\beta}\ln\left(\frac{1}{\cos^2\phi_0}\right) = \frac{1}{2\beta}\ln\left(1+\tan^2\phi_0\right) = \underline{\frac{1}{2\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}v_0^2\right)}$$

<u>AN:</u> $\underline{d \simeq 562\ m}$

3. <u>Si $\vec{F_1} = \vec{0}$:</u> alors $(*)$ devient $\frac{dv}{dt} = -\beta v^2$

$$\Rightarrow -\frac{dv}{v^2} = dt \times \beta$$

et on intègre entre $t=0$ et $t>0$: $\displaystyle\int_{v_0}^{v(t)} -\frac{1}{v^2}\, dv = \int_0^t \beta\, dt$

d'où $\left[\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v(t)} = \beta t$

$$\Rightarrow \frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0} = \beta t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v(t)} = \beta t + \frac{1}{v_0} = \frac{v_0\beta t + 1}{v_0} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0\beta t}$$

et alors on intègre l'expression de $v(t)$ par rapport au temps pour déterminer $x(t)$.

$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0\,dt}{1+v_0\beta t} = \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + v_0\beta t\right)$$

$v(t)$ atteint 0 pour $t \to \infty$ et alors la distance parcourue $d \to \infty$.

$\Rightarrow$ les frottements solides sont nécessaires pour arrêter la voiture !

Si $\vec{F_2} = \vec{0}$: alors $(*)$ s'écrit : $\frac{dv}{dt} = -\alpha$

$$\Rightarrow v(t) = -\alpha t + A = -\alpha t + v_0$$

↑ cste d'intégration.

$$\Rightarrow x(t) = -\alpha\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

La vitesse décroît linéairement au cours du temps et la voiture s'arrête au bout de $\tau = \frac{v_0}{\alpha}$ et $d = x(\tau) = -\alpha\left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + v_0\frac{v_0}{\alpha} = \frac{v_0^2}{2\alpha}$

AN : $\tau \simeq 102\,s$ et $d \simeq 1020\,m$