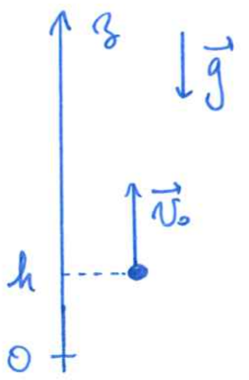
Correction TD 10

Exercice 1



Réf : terrestre galiléen

Syst : masse m

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$

on suppose qu'il n'y a pas de frottements

Le système est conservatif (aucune force non conservative ne s'appliquent au système). Donc $E_m = cste = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

Or à t=0 : $E_m(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0)$

et $E_c(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2$

$E_p(t=0) = mgh$

on exprime $E_p(z) = mgz + K$ et on choisit ici $K = 0$.

D'où $E_m(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$

* Déterminons H hauteur maximale

lorsque la masse atteint la hauteur maximale, $v = 0$

Donc à cet instant : $E_m = \frac{1}{2}m\,0^2 + mgH = mgH$

Or $E_m = cste \Rightarrow mgH = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$

D'où $H = \frac{v_0^2}{2g} + h$

* Déterminons V vitesse au sol

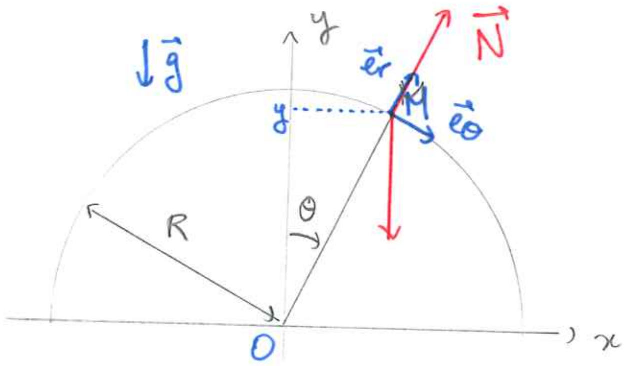
on cherche la vitesse lorsque $z = 0$

À cet instant : $E_m = \frac{1}{2}mV^2 + mg\times 0 = \frac{1}{2}mV^2$

Or $E_m = \text{cste} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$

D'où $\underline{V = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$

Exercice 2



Réf: terrestre galiléen

Syst: masse m

Bilan des forces: $\vec{P}$, $\vec{N}$

On suppose qu'il y a contact, donc $N > 0$

Utilisons une approche énergétique:

* Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Or $\vec{OM} = R\vec{e_r} \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

D'où $E_c = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$

* Énergie potentielle de pesanteur

$E_p = mgy + K$, on prendre $K = 0$

Or en coordonnées polaires (en faisant intervenir θ), on trouve $y = R\cos\theta$

D'où $E_p = mgR\cos\theta$

* Énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

* Th. de l'Em :

$\Delta E_m = W^{NC}$ ici $\vec{N}$ ne travaille pas car $\vec{N}$ est orthogonal au mouvement

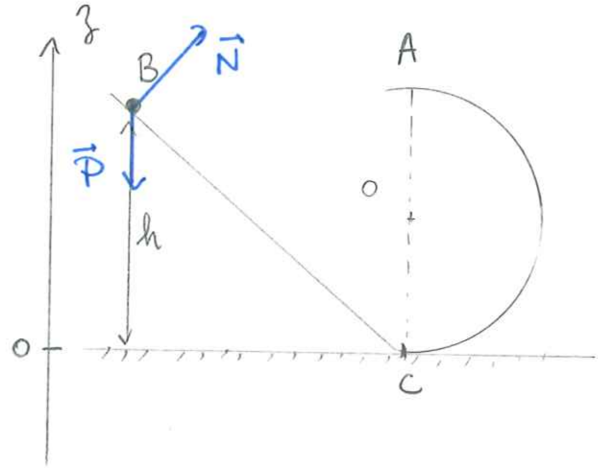
$= 0$

$E_m = \text{cste} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

Or $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} m R^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR \cdot \dot{\theta}(-\sin\theta)$

D'où $mR^2\ddot{\theta} - mgR\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

Exercice 3



1. Réf : terrestre galiléen

Syst : masse m

Bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{N}$

Utilisons une approche énergétique.

* Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$
* Énergie potentielle : $E_p = mgz + K$, on choisit $K = 0$
  (autrement dit on choisit $E_p(0) = 0$)
* Énergie mécanique : $E_m = E_C + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

Or $\delta W(\vec{N}) = 0$ car $\vec{N}$ est constamment orthogonal au mouvement.

Donc E_m reste constante (le mouvement est conservatif !)

Or si la masse atteint A en $t = t_A$, alors

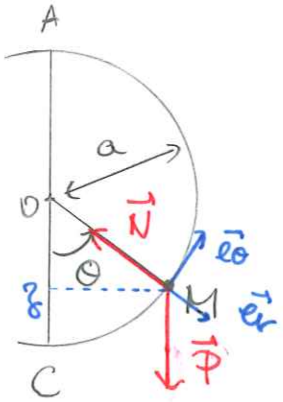
$$E_m(t=0) = E_m(t=t_A)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}m\, 0^2}_{\text{vitesse initiale nulle}} + mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2a)$$

D'où : $v_A^2 = 2g(h-2a) \Rightarrow v_A = \sqrt{2g(h-2a)}$

v_A n'est défini que si $h > 2a$ (il faut que l'énergie mécanique initiale soit suffisante pour mener la masse jusqu'en A)

2. Pour déterminer N, impossible d'utiliser un théorème énergétique, car $\vec{N}$ ne travaille jamais. Il faut utiliser le PFD.



Il s'écrit $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

Or entre C et A ; on utilise les coordonnées polaires (r, θ) pour étudier le mouvement.

$$\vec{N} = -N\vec{e_r}$$

$$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\vec{e_r}) = a\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

et alors $\vec{a} = a\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - a\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

En projection, le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta & (*) \\ ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

(*) permet d'exprimer $N = mg\cos\theta + ma\dot{\theta}^2$

$$= mg\cos\theta + m\frac{v^2}{a} \quad \text{car } \|\vec{v}\| = |a\dot{\theta}|$$

Or grâce à l'étude énergétique, on avait $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{cste} = mgh$

et sur la portion circulaire $z = a(1-\cos\theta)$

D'où $\frac{1}{2}mv^2 + mga(1-\cos\theta) = mgh$

$$\Rightarrow v^2 = 2g\left(h - a(1-\cos\theta)\right)$$

En réinjectant dans l'expression de N : $N = mg\cos\theta + 2mg\left(\frac{h - a(1-\cos\theta)}{a}\right)$

$$\Rightarrow N = mg\left(3\cos\theta + 2\frac{h-a}{a}\right)$$

3. Il faut que $N > 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ (lorsque la bille est en A).

Cela signifiera que le contact est bien observé tout le long de la partie circulaire.

Donc $N > 0$ à $\theta = \pi$ s'écrit

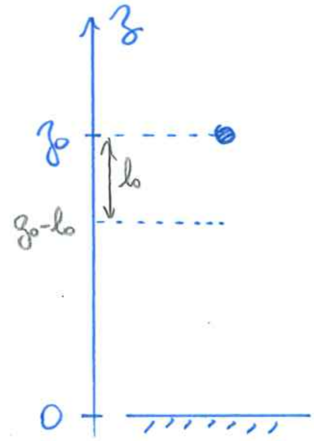
$$mg\left(3\cos(\pi) + \frac{2h-a}{a}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3a + 2h - a > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{h > 2a}$$

On retrouve la même condition qu'à la première question.

Exercice 4



1. L'axe des z est choisi ascendant, et donc $\vec{g} = -g\vec{e_z}$

* $E_{pp} = mgz + K$

énergie potentielle de pesanteur du système de masse m

Or on choisit $E_{pp} = 0$ pour $z = 0$

Donc $K = 0$

et alors $\underline{E_{pp} = mgz}$

* Déterminons l'énergie potentielle élastique E_{pe}.

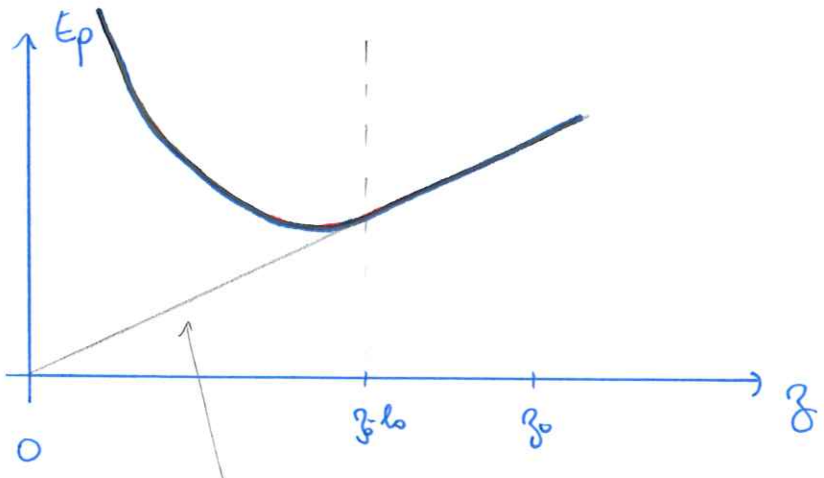
→ pour z tel que $z_0 - z < l_0 \Leftrightarrow z > z_0 - l_0$: l'élastique n'est pas étiré, alors $E_{pe} = 0$

→ pour z avec $z \leq z_0 - l_0$: l'élastique se comporte comme un ressort de raideur k. Alors $E_{pe} = \frac{1}{2}k(z - (z_0 - l_0))^2$ où $z - (z_0 - l_0)$ est l'allongement du ressort.

Or $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

Finalement : * $z \in [z_0 - l_0, z_0]$: $\underline{E_p = mgz}$

* $z \in [0, z_0 - l_0]$: $\underline{E_p = mgz + \frac{1}{2}k(z - z_0 + l_0)^2}$



2. Le système est conservatif car aucune force non conservative ne s'applique au système. Donc l'énergie mécanique est <u>conservée</u>.

À $t=0$, l'énergie mécanique vaut : $E_m = \underbrace{E_c}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \text{vitesse initiale nulle.}}} + E_p = mgz_0$

Pour que le saut soit sans danger, il faut que la <u>vitesse s'annule dans le cas limite où $z=0$</u>.

Or l'énergie mécanique en ce point (où $z=0$) s'écrit $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - z_0)^2$

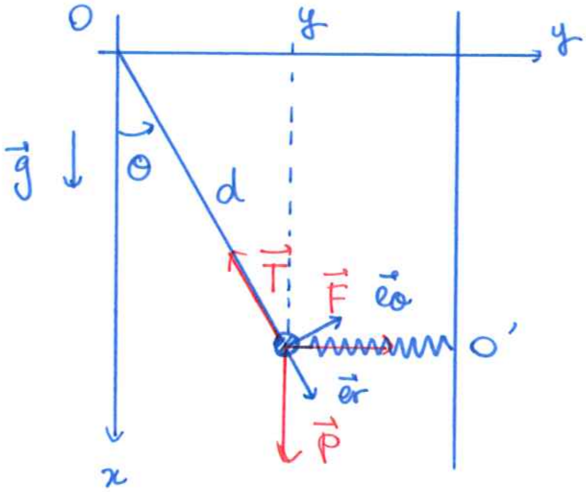
Si $v=0$ en $z=0$, alors la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2}k(l_0 - z_0)^2 = mgz_0 \Rightarrow k = \frac{2mgz_0}{(l_0 - z_0)^2}$$

Ainsi pour que le saut soit sans danger il faut que la raideur k soit supérieure à $k_l = \dfrac{2mgz_0}{(z_0 - l_0)^2}$

AN : $k_l = 52,5 \text{ N.m}^{-1}$

Exercice 5



1. Réf : terrestre galiléen

   Syst : masse m

   Bilan des forces : - poids $\vec{P} = m\vec{g}$

   - tension du ressort

     $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e_y}$

     or $l = l_0 - y$

     d'où $\vec{F} = -ky\vec{e_y}$

   - tension $\vec{T}$ de la tige.

On projette dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$:

- $\vec{T} = -T\vec{e_r}$
- $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$
- $\vec{F} = -ky\vec{e_y}$ or $\vec{e_y} = \cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r}$ à vérifier dans les cas limites !

  et $y = d\sin\theta$

d'où $\vec{F} = -kd\sin\theta\left(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r}\right)$

2. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}$

En projetant selon $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ l'accélération :

$$\vec{OM} = d\vec{e_r} \Rightarrow \vec{v} = d\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\text{et} \quad \vec{a} = -d\dot{\theta}^2\vec{e_r} + d\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$

Donc le PFD projeté :

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e_r} : & -md\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - kd\sin^2\theta - T \quad (*) \\ \text{selon } \vec{e_\theta} : & md\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kd\sin\theta\cos\theta \quad (**) \end{cases}$$

L'équation $(**)$ donne : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{d}\sin\theta - \frac{k}{m}\sin\theta\cos\theta$

en posant $\omega_2^2 = \frac{g}{d}$ et $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ on trouve :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0$$

3. Comme $\vec{P}$ et $\vec{F}$ sont des forces conservatives et $\vec{T}$ ne travaille pas, le système est conservatif et son énergie mécanique se conserve.

attention car axe des x descendant

Méthode 1 : Comme $E_{pp} = -mgx + K$

choisi égal à 0

et $E_{pe} = \frac{1}{2}ky^2 + K'$

choisi à 0

et $x = d\cos\theta$, $y = d\sin\theta$, on trouve :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgd\cos\theta + \frac{1}{2}k(d\sin\theta)^2$$

$$= md^2\left(\frac{k}{2m}\sin^2\theta - \frac{g}{d}\cos\theta\right)$$

$$= md^2\left(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta\right)$$

Méthode 2 : Comme le déplacement élémentaire est

$$d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} = d \times d\theta\,\vec{e_\theta} \quad \text{car } r = d = \text{cste}$$

car $dr = 0$ (pas de déplacement selon $\vec{e_r}$)

Donc le travail des forces conservatives est :

$$\delta W = (\vec{P}+\vec{F}).\, d\vec{om}$$

$$= \left[mg\cos\theta\, \vec{e_r} - mg\sin\theta\, \vec{e_\theta} - kd\sin\theta(\cos\theta\, \vec{e_\theta} + \sin\theta\, \vec{e_r})\right].\, d.\, d\theta\, \vec{e_\theta}$$

$$= -mgd\sin\theta\, d\theta - kd^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

or $\sin\theta\, d\theta = -d\left[\cos\theta\right]$ et $\sin\theta\cos\theta\, d\theta = d\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]$

car $\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta) = 2\sin\theta.\cos\theta$

d'où $\delta W = d\left[mgd\cos\theta\right] - d\left[\frac{kd^2}{2}\sin^2\theta\right]$

$$= -d\left[\frac{kd^2}{2}\sin^2\theta - mgd\cos\theta\right]$$

or $\delta W = -dE_p$

D'où $E_p = \frac{kd^2}{2}\sin^2\theta - mgd\cos\theta + K$ ← on choisit $=0$

$$= md^2\left[\frac{k}{2m}\sin^2\theta - \frac{g}{d}\cos\theta\right]$$

$$= \underline{md^2\left[\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta\right]}$$

4. Les positions d'équilibre sont les positions θ telles que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

Or $\frac{dE_p}{d\theta} = md^2\left(\omega_1^2.\, \sin\theta\cos\theta + \omega_2^2\sin\theta\right)$

$$= md^2\sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right)$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \iff \begin{cases} \sin\theta = 0 & (*) \\ \text{ou} & \\ \omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2 = 0 & (**) \end{cases}$$

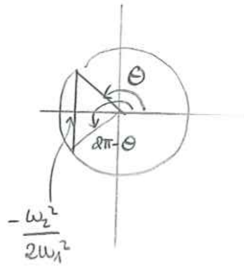
$(*)$ donne comme positions d'équilibre $\underline{\theta = 0}$ ou $\underline{\theta = \pi}$

(**) n'est possible que si $\cos\theta$ est bien entre -1 et 1

donc $\cos\theta = -\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2} > -1 \iff \underline{\omega_2^2 < \omega_1^2}$

Si la condition est vérifiée, alors il y a deux positions d'équilibres supplémentaires : $\underline{\theta = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)} \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

et $\underline{\theta = 2\pi - \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)} \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$



5. Déterminons le signe de $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}$ pour $\theta = 0$:

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = md^2\cos\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) + md^2\sin\theta\left(-\omega_1^2\sin\theta\right)$$

pour $\theta = 0$: $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) = md^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) > 0$

D'où la position $\underline{\theta = 0 \text{ est un équilibre stable}}$.

<u>Méthode 1</u> : Autour de $\theta_{eq} = 0$, E_p s'écrit :

$$E_p(\theta) = E_p(0) + \frac{1}{2}(\theta - \underbrace{\theta_{eq}}_{=0})^2 \quad \text{où } K = \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(0)$$

et, comme $E_m = \text{cste} \implies \dfrac{dE_m}{dt} = 0$:

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left[E_c + E_p\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(d\dot\theta)^2\right) + \frac{d}{dt}\left(E_p(0) + \frac{1}{2}K(\theta - \underbrace{\theta_{eq}}_{=0})^2\right)$$

$$= md^2\dot\theta\ddot\theta + K\dot\theta\theta$$

et $\dfrac{dE_m}{dt} = 0 \iff \ddot\theta + \dfrac{K}{md^2}\theta = 0$

$\iff \underline{\ddot\theta + \Omega^2\theta = 0}$ où $\underline{\Omega^2 = \dfrac{K}{md^2} = \omega_1^2 + \omega_2^2}$

Méthode 2 : Prenons l'équation du mouvement de la question 2 et développons autour de $\theta_{eq} = 0$:

alors $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$

et on obtient $\ddot{\theta} + \theta(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0$

on retrouve le même résultat !

Rq: de manière plus rigoureuse, cela revient à faire un développement limité à l'ordre 1 de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ autour de $\theta_{eq} = 0$.

6. Reprenons l'expression de $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}$ et évaluons son signe pour $\theta = \pi$:

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta=\pi) = md^2(-1)\left(-\omega_1^2 + \omega_2^2\right)$$

Donc si $\omega_1^2 > \omega_2^2$ alors $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$, $\theta_{eq} = \pi$ est stable

si $\omega_1^2 < \omega_2^2$ alors $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0$, $\theta_{eq} = \pi$ est instable

Comparer ω_1^2 et ω_2^2 revient à comparer la contribution de la force du ressort (ω_1^2) à celle de la pesanteur (ω_2^2). En $\theta_{eq} = \pi$, le ressort est au repos (minimum d'énergie potentielle élastique) alors que le pendule est à l'envers (maximum d'énergie potentielle de pesanteur). Si la force de rappel (donc la raideur du ressort) est suffisamment grande pour contrer l'influence de la pesanteur à ramener la masse vers le bas, θ_{ep} reste stable. Cela se traduit par $\frac{k}{m} > \frac{g}{d}$

$\Leftrightarrow k > \frac{mg}{d}$

7. Dans le cas où la position $\theta_{ep} = \pi$ est stable, alors

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta=\pi) = md^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

en refaisant le même raisonnement qu'à la question 5, en remplaçant K par $K' = md^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)$, on trouve :

$$\ddot{\Theta} + \Omega'^2 \Theta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega'^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2$$

$$\Rightarrow \Omega' = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

Rq: on aurait pu de nouveau développer autour de $\Theta_{eq} = \pi$ l'équation du mouvement. En posant $\Theta = \Theta_{eq} + \varepsilon(t)$, $\varepsilon \ll \Theta_{eq}$, on a :

$\cos(\Theta_{eq} + \varepsilon) \simeq -1$ à l'ordre 1

$\sin(\Theta_{eq} + \varepsilon) \simeq \varepsilon$ à l'ordre 1

$\ddot{\Theta} = \ddot{\varepsilon}$ car $\frac{d^2}{dt^2}(\Theta_{eq} + \varepsilon) = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$

d'où $\ddot{\varepsilon} + \varepsilon(-\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0$

8. Pour que les deux dernières positions d'équilibres existent, il faut $\omega_1^2 > \omega_2^2$ et alors

$$\begin{cases} \Theta_{eq_1} = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \\ \Theta_{eq_2} = 2\pi - \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \end{cases}$$

Or $\frac{d^2E_p}{d\Theta^2}(\Theta_{eq1}) = md^2 \cos\Theta_{eq1}\left(\omega_1^2 \cos\Theta_{eq1} + \omega_2^2\right) - md^2\omega_1^2 \sin^2\Theta_{eq1}$

et $\cos\Theta_{eq1} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$

et $\omega_1^2 \cos\Theta_{eq1} + \omega_2^2 = \omega_1^2\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) + \omega_2^2 = 0$

d'où $\frac{d^2E_p}{d\Theta^2}(\Theta_{eq1}) = -md^2\omega_1^2 \sin^2(\Theta_{eq1}) < 0$

La position Θ_{eq1} est donc une position d'équilibre instable

Le calcul avec Θ_{eq2} mène au même résultat et donc à la même conclusion.

Exercice 6

Réf : terrestre galiléen

Système : masse

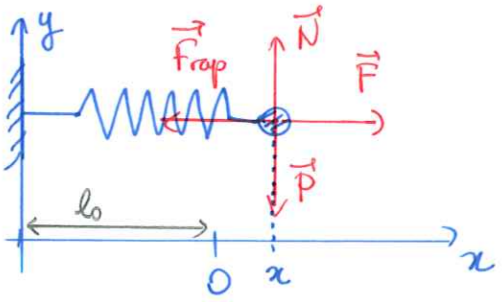
Bilan de forces : poids $\vec{P} = -mg\vec{e_y}$

réaction normale $\vec{N} = N\vec{e_y}$

force de rappel : $\vec{F_{rap}} = -k\,x\,\vec{e_x}$

force appliquée $\vec{F} = F\vec{e_x}$ (pour $t>0$)

Pour $t>0$:



choisi à la position où le ressort est au repos.

* Déterminons l_1 :

Pour $t<0$, à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_{rap}} + \vec{F} = 0$ (PFD)

projection : $\begin{cases} -mg + N = 0 \\ -kx - F = 0 \quad (*) \quad (\vec{F} = -F\vec{e_x}) \end{cases}$

Or $x = -l_1$ où l_1 est l'allongement dû à l'application de la force $\vec{F}$.

(*) donne $l_1 = \dfrac{F}{k}$

* Déterminons l_2 :

Lorsque le ressort atteint son allongement maximal, la vitesse du mobile s'annule.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initiale ($x_1 = -l_1$) et l'instant de l'allongement maximal ($x_2 = l_2$)

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{N}) + W(\vec{F}) + W(\vec{F_{rap}})$$

Or $W(\vec{P}) = W(\vec{N}) = 0$ car $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux au mouvement.

$$W(\vec{F}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\,d\vec{OM} = \int_{x_1}^{x_2} F\vec{e_x}.(dx\vec{e_x}) = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = F(x_2 - x_1) = F(l_1 + l_2)$$

$$W(\vec{F_{rap}}) = -\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}k(l_1^2 - l_2^2)$$

D'où $\Delta E_c = F(l_1 + l_2) + \frac{1}{2}k(l_1^2 - l_2^2)$

Or $\Delta E_c = 0$ car la vitesse est nulle en x_1 et en x_2

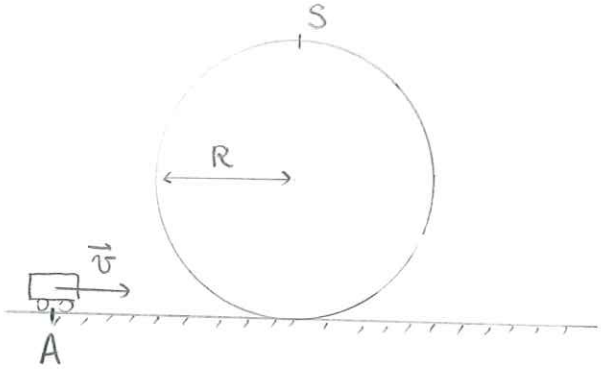
D'où $F(l_1+l_2) + \frac{k}{2}(l_1^2 - l_2^2) = 0$

$$\Rightarrow \left(F + \frac{k}{2}(l_1 - l_2)\right)(l_1+l_2) = 0$$

Or $F = kl_1$, d'où $\left(l_1 + \frac{l_1 - l_2}{2}\right)(l_1 + l_2) = 0$

Ainsi on a deux solutions : $\begin{cases} l_2 = -l_1 \rightarrow \text{c'est le point de départ} \\ \underline{l_2 = 3l_1} \end{cases}$

Exercice 7



Réf : terrestre galiléen

Syst : wagon de masse m

Bilan des forces : $\vec{P}$ poids

$\vec{N}$ réaction du support (normale)

Faisons un théorème de l'énergie cinétique entre A position initiale et S sommet du looping :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + \underbrace{W(\vec{N})}_{=0 \text{ car } \vec{N} \text{ orthogonal au mouvement}}$$

$$W(\vec{P}) = -\Delta E_p = -\left(E_p(S) - E_p(A)\right)$$

Or la variation d'altitude entre A et S est $2R$

D'où $W(\vec{P}) = -\Delta E_p = -mg \times 2R$. et $\Delta E_c = -mg \cdot 2R$

Pour que le wagon puisse passer le looping, il faut que la vitesse du wagon en S soit non nulle, donc il faut que $E_c(S) > 0$

$$E_c(S) - E_c(A) = -mg \cdot 2R$$

$$\Leftrightarrow \quad E_c(S) = E_c(A) - 2mgR$$

$$E_c(S) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - 2mgR > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v_A^2 > 4gR$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{v_A > v_{min}} \quad \text{avec} \quad \underline{v_{min} = 2\sqrt{gR}}$$

Exercice 8

1. On calcule le travail de la force de freinage sur la distance de freinage d.

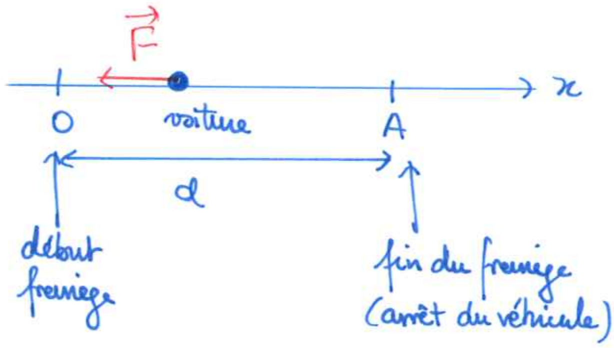
Soit $\vec{F} = -F\vec{e_x}$, où $\vec{e_x}$ sens du mouvement.

$$W(\vec{F}) = \int_0^A \vec{F} \, d\vec{OM}$$

$$= \vec{F} \cdot \int_0^A d\vec{OM} \quad \text{or}$$

$$= \vec{F} \cdot d\vec{e_x}$$

$$\underline{W(\vec{F}) = -Fd}$$



2. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = E_c(A) - E_c(0) = W(\vec{F})$$

(le travail de $\vec{P}$, $\vec{N}$ sont nuls)

Or $E_c(A) = 0$

$E_c(0) = \frac{1}{2} m v_0^2$

D'où $-\frac{1}{2} m v_0^2 = -Fd$

$$\Rightarrow \quad \underline{F = \frac{m v_0^2}{2d}}$$

A.N : $\underline{F \simeq 9{,}6 \cdot 10^3 \, N}$

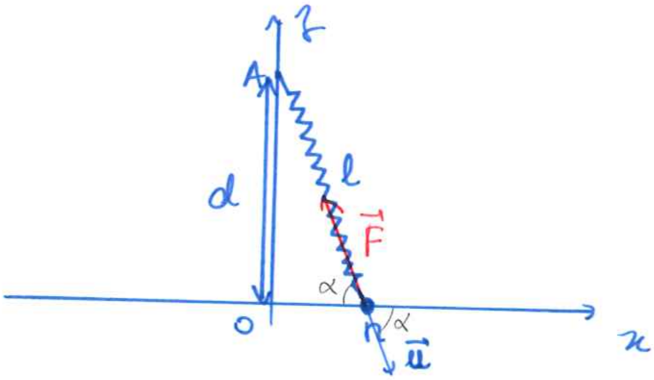
3. Reprenons l'expression précédente : $F = \frac{m v_0'^2}{2d'} \Rightarrow d' = \frac{m v_0'^2}{2F}$

AN : $d' \simeq 29\,m$

avec $v_0' = 70 km/h$

4. Cette phrase est cohérente avec le modèle simple utilisé dans cet exercice. Il faut que la force de freinage soit constante.

Exercice 9



1. L'énergie potentielle du point matériel résulte de l'énergie potentielle élastique due au ressort.

Méthode 1 :

Sachant que $E_p = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$

et $l^2 = d^2 + x^2$

D'où $E_p = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0 \right)^2$

Méthode 2 :

Écrire la force $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$ et le déplacement élémentaire $d\vec{OM} = dx\,\vec{e_x}$

D'où $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -k(l - l_0)\,dx\,\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{e_x}}_{\cos\alpha}$ où $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$

$$= -k\left(\sqrt{x^2 + d^2} - l_0\right) \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Puis à intégrer ...

* Tracé de $E_p(x)$

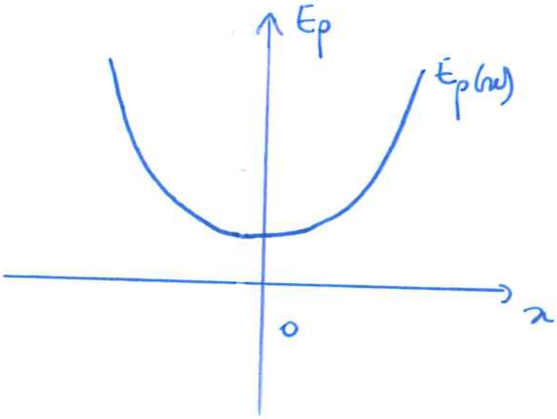
Calculons $\frac{dE_p}{dx}$ pour déterminer son évolution :

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2} k \times 2\left(\sqrt{x^2+d^2} - l_0\right) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{d^2+x^2}}$$

* si $d > l_0$: $\sqrt{x^2+d^2} - l_0 > 0 \ \forall x$ ← car $d^2 > l_0^2 \Rightarrow x^2+d^2 > l_0^2$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+d^2} > l_0$

donc $\frac{dE_p}{dx}$ du signe de x

et $\frac{dE_p}{dx}$ s'annule en $x = 0$



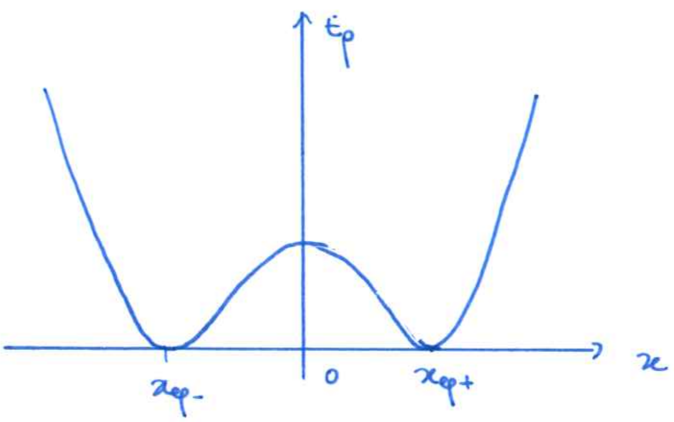
Vu que $x_{eq} = 0$ est un minimum de E_p, c'est une position d'équilibre stable

* si $d < l_0$:

x	$-\infty$	x_{eq-}		0		x_{eq+}	$+\infty$
x		$-$		|		$+$	
$\sqrt{x^2+d^2} - l_0$	$+$	|	$-$		$-$	|	$+$
$E_p(x)$	↘	|	↗	|	↘	|	↗

$\sqrt{x^2+d^2} - l_0$ s'annule en $x_{eq\pm}$ tel que

$$\sqrt{x^2+d^2} = l_0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = l_0^2 - d^2$$
$$\Leftrightarrow x_{eq\pm} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$$

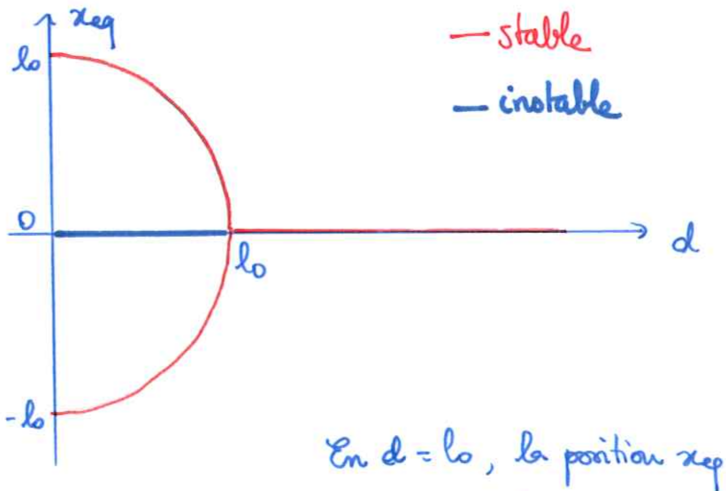


Il y a trois positions d'équilibres :

* $x_{eq} = 0$ → instable (maximum d'E_p)

* $x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$ → stable (minimum d'E_p)

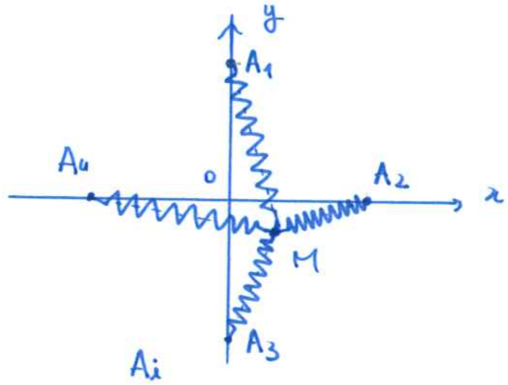
2.



En $d = l_0$, la position $x_{eq} = 0$ passe d'une position d'éq stable à instable.

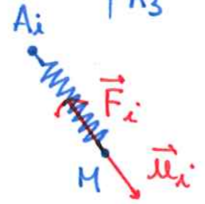
Quand d décroît et arrive à $d = l_0$, le système doit choisir la position d'équilibre stable à suivre. Il s'agit d'une brisure de symétrie.

Exercice 10



1. Notons $\vec{F_i}$ la force de rappel du ressort i sur M.

$\vec{F_i} = -k\,(A_iM).\vec{u_i}$ où $\vec{u_i}$ vecteur unitaire du ressort vers M.



Or $A_iM\,\vec{u_i} = \overrightarrow{A_iM}$

D'où $\vec{F_i} = -k\overrightarrow{A_iM}$

La somme des forces s'exprime :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F_i} = -k\left[\overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + \overrightarrow{A_3M} + \overrightarrow{A_4M}\right]$$

Or O est le barycentre des $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, d'où $\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{A_iM} = 4\overrightarrow{OM}$

D'où $\vec{F} = -k \times 4\overrightarrow{OM}$

Or quand $M = O$, $\vec{F} = \vec{0}$ donc O est une position d'équilibre.

2. On applique le PFD sur m dans le réf. terrestre galiléen :

$$m\vec{a} = -4k\vec{OM}$$

Or en coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y}$

et $\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

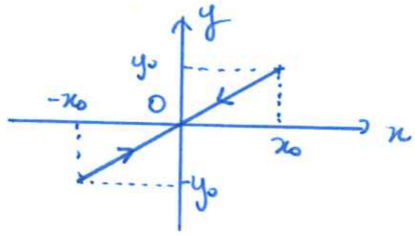
D'où $\begin{cases} \ddot{x} m = -4kx \\ \ddot{y} \cdot m = -4ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{4k}{m}$

En résolvant, sachant que $x(t=0) = x_0$, $y(t=0) = y_0$, $\dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}(t=0) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)} \\ \underline{y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)} \end{cases}$

x et y oscillent en phase ! Le point M se déplace selon une droite :

La période est $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{4k}}$



3. Calculons $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -4k\vec{OM} \cdot d\vec{OM}$

$$= -d\left[4k \cdot \frac{1}{2}\vec{OM}^2\right]$$

Or $\delta W = -dE_p$ d'où $E_p = 2kOM^2 + K$

on prend $E_p(0) = 0 \Rightarrow K = 0$

D'où $\underline{E_p = \frac{1}{2}k'r^2}$ où $\underline{k' = 4k}$

On retrouve l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique avec $k' = 4k$

donc $\omega_0^2 = \dfrac{k'}{m} = \dfrac{4k}{m}$.