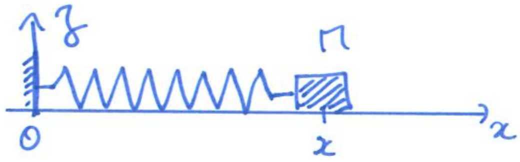
Correction TD 7

Exercice 1



1. Faisons un bilan des forces qui s'appliquent à la masse m :
   - → poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
   - → réaction normale : $\vec{R} = R\vec{u_z}$
   - → force de rappel : $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u_x}$
   - → force de frottements : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

Ici, nous avons placé l'autre extrémité du ressort en O origine de l'axe des x.

Le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}$$

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x}$

projeté selon l'axe Ox : $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_0) - \lambda\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = kl_0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$$

2. Sous forme canonique, on obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$

Si $Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique

$x(t)$ oscille autour de la position d'équilibre avec une amplitude décroissant exponentiellement avec le temps.

Si $Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique

aucune oscillation n'est observée, $x(t)$ tend vers la position d'équilibre sans la dépasser.

Si $Q = \frac{1}{2}$ régime critique

Cas limite où $x(t)$ tend le plus rapidement vers la position d'équilibre.

3. On suppose que $Q < \frac{1}{2}$ (régime apériodique).

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

les racines sont : $r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}}{2}$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$x(t) = Ae^{+r_+ t} + Be^{r_- t} + x_p$$

solution particulière constante
ici $x_p = l_0$

Or à $t=0$: $\begin{cases} x(0) = l_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \end{cases}$

et $x(0) = A + B + l_0$

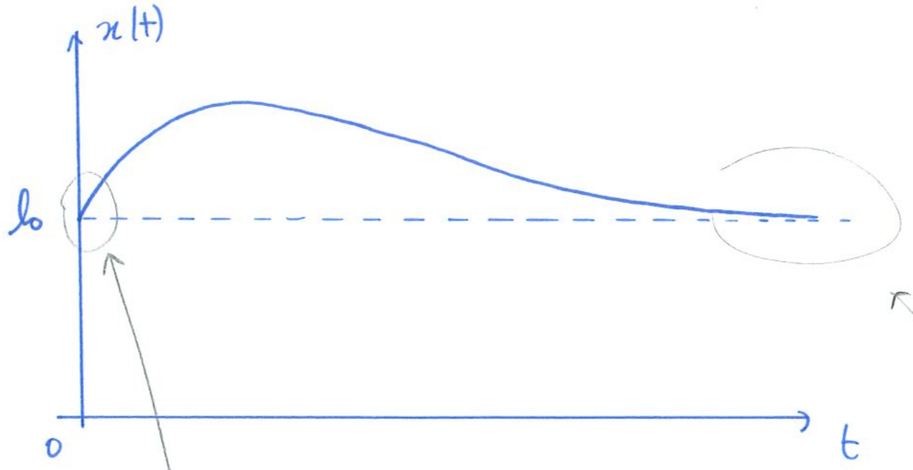
$\dot{x}(0) = Ar_+ + Br_-$

d'où $\begin{cases} A + B + l_0 = l_0 \\ Ar_+ + Br_- = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B(r_- - r_+) = v_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{v_0}{r_- - r_+} \\ B = \frac{v_0}{r_- - r_+} \end{cases}$$

D'où $\underline{x(t) = \frac{v_0}{r_- - r_+}\left(-e^{r_+ t} + e^{r_- t}\right) + l_0}$

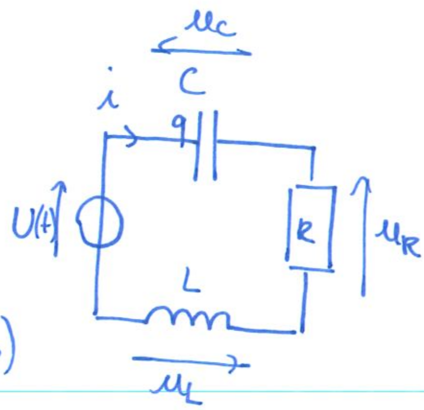
4.



à $t=0$, la dérivée est égale à $v_0 \neq 0$.
et $x(0) = l_0$.

tend vers la solution particulière !

Exercice 2



1. À $t=0^-$, $U(t) = 0$

Or si l'on suppose que le circuit est en régime stationnaire (que $U(t)=0$ depuis longtemps)

alors le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert
la bobine se comporte comme un fil.

Or cela implique $i(t=0^-) = 0$ (circuit ouvert)

De plus, d'après la loi des mailles : $u_C + u_L + u_R = 0$

or $\begin{cases} u_R(t=0^-) = 0 & \text{car } i(t=0^-) = 0 \\ u_L(t=0^-) = 0 & \text{car équivalent à un fil.} \end{cases}$

Donc $u_C(t=0^-) = 0$ et $q(t=0^-) = 0$.

2. Pour $t > 0$, $U(t) = E$

La loi des mailles s'écrit : $E = u_C + u_R + u_L$

Or $u_C = \frac{q}{C}$, $u_R = Ri = R.\frac{dq}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}.\frac{dq}{dt}$

D'où $E = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}}$$

en posant $\underline{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$ et $\underline{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$, on obtient :

$$\underline{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}}$$

3. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-)$

or $q = C \times u_C \Rightarrow \underline{q(t=0^+) = q(t=0^-) = 0}$

Par continuité de l'intensité du courant traversant une bobine :

$i(t=0^+) = i(t=0^-)$

$\Rightarrow \underline{\frac{dq}{dt}(t=0^+) = \frac{dq}{dt}(t=0^-) = 0}$

4. Lorsque le circuit atteint le régime permanent stationnaire, on peut appliquer le même raisonnement que pour la question 1.

Comme le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : $\underline{i(t\to\infty) = 0}$

donc $\underline{\frac{dq}{dt}(\infty) = 0}$

Une loi des mailles donne : $E = u_C + u_R + u_L$

comme $u_R = 0$ car $i(\infty) = 0$

et $u_L = 0$ car similaire à un fil

$u_C(\infty) = E \Rightarrow \underline{q(\infty) = CE}$

5. On suppose que $\omega_0 > \gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} > \frac{R}{2L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2}$$

La condition est équivalente à $\underline{Q > \frac{1}{2}}$

On est en régime pseudo-périodique. Les racines du polynôme caractéristique sont complexes.

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_\pm = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$q(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} + q_p$$

solution particulière constante

où $\underline{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

ici $\underline{q_p = CE}$

on remarque que $\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{2\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)} = \frac{R}{2L} = \gamma$

Donc $q(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)e^{-\gamma t} + CE$

On détermine A et B à l'aide des conditions initiales.

* $q(0) = A + CE$

  or $q(0^+) = 0$, donc $\underline{A = -CE}$

* $\frac{dq}{dt}(0) = B\omega + (-\gamma A)$ or $\frac{dq}{dt}(0^+) = 0$ donc $\underline{B = -\frac{\gamma CE}{\omega}}$

(On trouve : $\gamma = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ donc $\dfrac{\gamma}{\omega} = \dfrac{\omega_0}{2Q\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$

donc $B = -\dfrac{CE}{\sqrt{4Q^2-1}}$)

Donc : $q(t) = -CE\left(\cos(\omega t) + \dfrac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-\gamma t} + CE$

6. $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$

Donc d'après la question précédente :

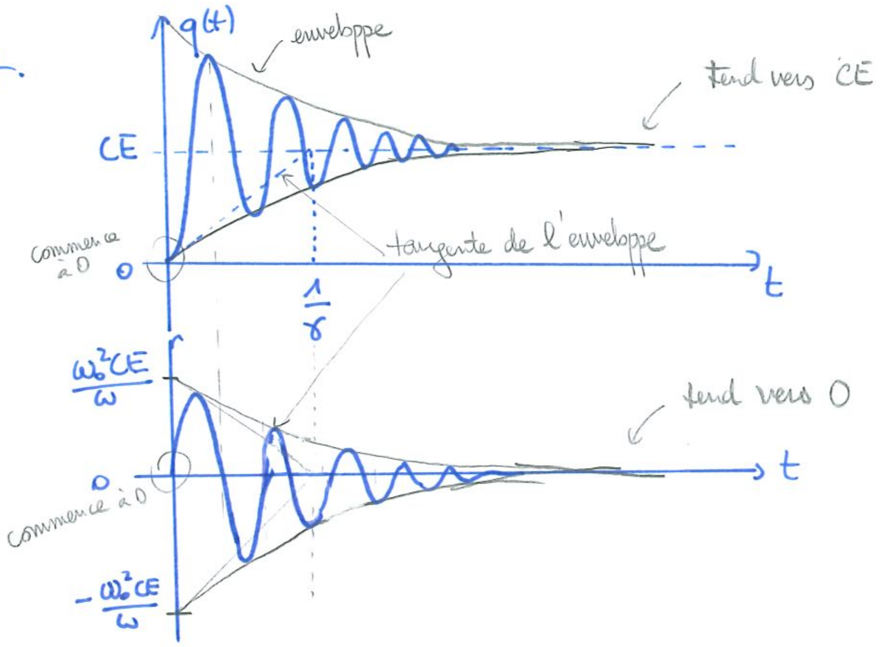
$$i(t) = CE\gamma\left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-\gamma t} - CE\left(-\omega\sin(\omega t) + \frac{\gamma\omega}{\omega}\cos(\omega t)\right)e^{-\gamma t}$$

$$= CE\left[\gamma\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t) + \frac{\gamma^2}{\omega}\sin(\omega t) - \gamma\cos(\omega t)\right]e^{-\gamma t}$$

Ainsi : $i(t) = CE\left(\omega + \dfrac{\gamma^2}{\omega}\right)\sin(\omega t)e^{-\gamma t}$

Rq : $\omega + \dfrac{\gamma^2}{\omega} = \dfrac{\omega^2+\gamma^2}{\omega} = \dfrac{\omega_0^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right) + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}{\omega} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega}$

7.



8. Pour déterminer ΔE_C et ΔE_L, on détermine l'énergie finale ($t \to \infty$) ainsi que l'énergie initiale dans C et L.

$$\Delta E_C = E_C(t\to\infty) - E_C(t=0)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}(t\to\infty) - \frac{1}{2}\frac{q(0)^2}{C}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{C^2E^2}{C} - 0$$

$$= \underline{\frac{1}{2}CE^2}$$

$$\Delta E_L = E_L(t\to\infty) - E_L(t=0)$$

$$= \frac{1}{2}L\,i(t\to\infty)^2 - \frac{1}{2}L\,i(t\to 0)^2$$

$$= \underline{0} \qquad \text{car } i(t\to\infty) = i(t\to 0) = 0$$

→ La bobine ne stocke que momentanément de l'énergie durant le régime transitoire.

E_G est déterminé en intégrant la puissance fournie par le générateur :

$$E_G = \int_0^\infty \mathcal{P}_{fournie,E}\,dt = \int_0^\infty E \times i(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty E \cdot \frac{dq}{dt}\,dt$$

$$= E\,[q(t)]_0^\infty$$

$$= E(CE - 0)$$

D'où $\underline{E_G = CE^2}$

9. À partir d'une loi des mailles :

$$E = u_R + u_C + u_L$$

$$\Rightarrow E \times i = u_R \times i + u_C \times i + u_L \times i$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{fournie,E} = \mathcal{P}_{Joule} + \mathcal{P}_{reçue,C} + \mathcal{P}_{reçue,L}$$

En intégrant entre $t=0$ et $t\to\infty$:

$$\int_0^\infty \mathcal{P}_{fournie,E}\,dt = \int_0^\infty \mathcal{P}_{Joule}\,dt + \int_0^\infty \mathcal{P}_{reçue,C}\,dt + \int_0^\infty \mathcal{P}_{reçue,L}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad E_G = E_{Joule} + \Delta E_C + \Delta E_L$$

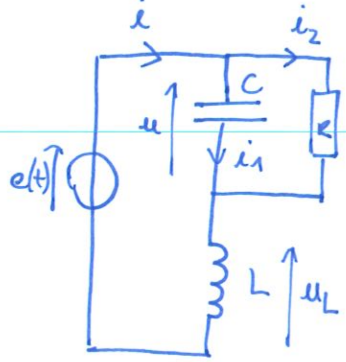
On retrouve la conservation de l'énergie.

Ainsi $E_{Joule} = E_G - \Delta E_C - \Delta E_L$

$$= \frac{1}{2}CE^2$$

Ces résultats d'étude énergétique ne dépendent pas du régime considéré.

Exercice 3



1. Pour $t>0$, $e(t)=E$

Une loi des noeuds donne :

$$i = i_1 + i_2$$

et la loi des mailles : $E = u + u_L$

Donc $i = C\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{R}$

$$= C\frac{d}{dt}(E-u_L) + \frac{E-u_L}{R}$$

$$= -C\frac{du_L}{dt} + \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R}$$

Or $u_L = L\dfrac{di}{dt}$: $\quad LC\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} + i = \dfrac{E}{R}$

2. On transforme l'équation différentielle précédente pour la mettre sous forme canonique :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{RLC}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{E}{R}\omega_0^2} \qquad \text{avec } \underline{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

$$\underline{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

* ω_0 est la pulsation propre. L'expression est la même que pour le circuit LC ou RLC série.

* Q est le facteur de qualité. Il est proportionnel à R, donc plus R sera grand, moins il y aura d'amortissements ! Cela se comprend en regardant le circuit : en augmentant R, peu de courant passe par cette branche, et à la limite où $R \to \infty$, plus de courant ne passe par la branche la contenant : on se retrouve alors avec un circuit LC ! (un oscillateur harmonique)

3. (cf ci-dessus)

4. Pour $t = 0^-$: on suppose qu'un régime stationnaire était établi. alors, comme la bobine est équivalente à un fil, on trouve que $u_L(t=0^-) = 0$ et alors $u(t=0^-) = e(t=0^-)$ d'après la loi des mailles
$= 0$

Or $i_1(t=0^-) = 0$ (C tel interrupteur ouvert), donc $i_2(t=0^-) = i(t=0^-)$

et ainsi, comme $u = Ri_2$, $i_2(t=0^-) = 0$

Donc $i(t=0^-) = 0$

Et par continuité du courant traversant une bobine : $\underline{i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0}$

Pour déterminer $\frac{di}{dt}(t=0^+)$, il suffit de déterminer $u_L(t=0^+)$ car $u_L = L\frac{di}{dt}$.

mais ⚠ $u_L(t=0^+)$ n'est pas forcément égal à $u_L(t=0^-) = 0$!

Par contre $u(t=0^+) = u(t=0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

Une loi des mailles à $t=0^+$ donne : $E = u(t=0^+) + u_L(t=0^+)$

$$\Rightarrow u_L(t=0^+) = E$$

et alors $\dfrac{di}{dt}(t=0^+) = \dfrac{E}{L}$

5. Si $Q=2$, alors le régime transitoire sera un régime pseudo périodique (car $Q > \frac{1}{2}$).

La forme générale de la solution s'écrit :

$$i(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)e^{-t/\tau} + i_p$$

solution particulière constante ici $i_p = \dfrac{E}{R}$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

$\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

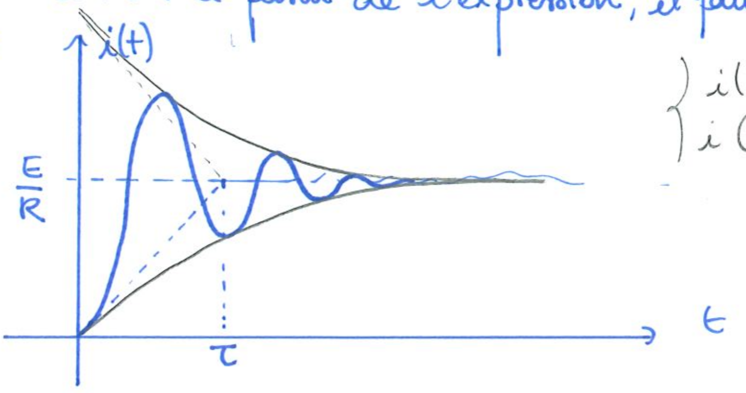
On détermine A et B avec les conditions initiales :

* $i(0) = A + \dfrac{E}{R}$ or $i(0^+) = 0$, donc $A = -\dfrac{E}{R}$

* $\dfrac{di}{dt}(0) = -\dfrac{A}{\tau} + B\omega = \dfrac{E}{L}$ donc $B = \dfrac{E}{L\omega} - \dfrac{E}{R\tau\omega}$

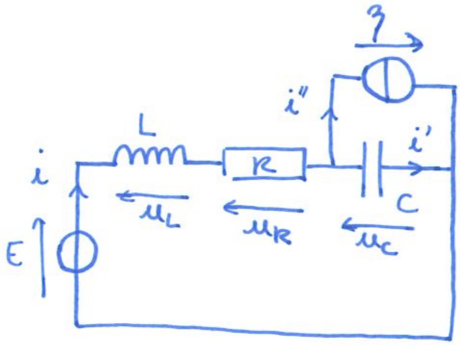
Donc $i(t) = \dfrac{E}{R} - \dfrac{E}{R}\left(\cos(\omega t) + \left(\dfrac{1}{\tau\omega} - \dfrac{R}{L\omega}\right)\sin(\omega t)\right)e^{-t/\tau}$

Ici difficile de tracer directement à partir de l'expression, il faut utiliser les asymptotes et tangentes :



$i(t=0) = 0$
$i(t\to\infty) = \dfrac{E}{R}$

Exercice 4



1. À $t=0^-$: $\begin{cases} u_C(t=0^-) = u_0 \\ i(t=0^-) = i_0 \end{cases}$

Par continuité du courant parcourant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$\begin{cases} \underline{u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = u_0} \\ \underline{i(t=0^+) = i(t=0^+) = i_0} \end{cases}$$

Or d'après la loi des mailles à $t=0^+$: $E = u_L + u_R + u_C$

comme $u_R = R \times i$: $\underline{u_R(t=0^+) = R i_0}$

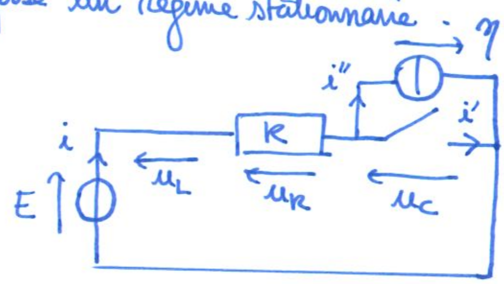
et alors $u_L(t=0^+) = E - u_R(t=0^+) - u_C(t=0^+)$

$= \underline{E - R i_0 - u_0}$

Or $u_L = L \dfrac{di}{dt}$, donc $\underline{\dfrac{di}{dt}(t=0^+) = \dfrac{E - R i_0 - u_0}{L}}$

2. Lorsque le régime permanent est atteint, on suppose un régime stationnaire :

La bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert.



donc $\underline{u_L(t\to\infty) = 0}$

et $\underline{i'(t\to\infty) = 0}$

Or cela signifie que $i = i'' + i'$ (loi des noeuds) devient : $i(t\to\infty) = i''(t\to\infty)$

or $i''(t\to\infty) = \eta \Rightarrow \underline{i(t\to\infty) = \eta}$

et donc comme $u_R = R \times i \Rightarrow \underline{u_R(t\to\infty) = R\eta}$

et la loi des mailles donne : $E = u_L + u_R + u_C$

$\Rightarrow \underline{u_C(t\to\infty) = E - R\eta}$

3. La loi des noeuds donne : $i = i' + i''$

or $i'' = \eta$, donc $i = i' + \eta$

La loi des mailles donne : $E = u_L + u_R + u_C$

or $i' = C \dfrac{du_C}{dt}$

Donc $i = i' + \eta \iff i = C \dfrac{d}{dt}\left(E - u_L - u_R\right) + \eta$

et $u_L = L \dfrac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$

D'où $i = -CL \dfrac{d^2 i}{dt^2} - RC \dfrac{di}{dt} + \eta$

$\Rightarrow \quad LC \dfrac{d^2 i}{dt^2} + RC \dfrac{di}{dt} + i = \eta$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2 i}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q} \dfrac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 \eta$

avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

4. Pour avoir un régime pseudo-périodique, il faut que $Q > \frac{1}{2}$

Donc que $\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} > \dfrac{1}{2}$

La solution s'écrit alors : $i(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)e^{-t/\tau} + \eta$

où $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$

et $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

solution particulière constante

On détermine A et B avec les conditions initiales :

* $i(0) = A + \eta$ or $i(0^+) = i_0$

Donc $A = i_0 - \eta$

* $\dfrac{di}{dt}(0) = B\omega + \left(-\dfrac{A}{\tau}\right)$ or $\dfrac{di}{dt}(0^+) = \dfrac{E - Ri_0 - u_0}{L}$

Donc $B = \frac{E}{\omega L} - \frac{R}{\omega L} i_0 - \frac{u_0}{L\omega} + \frac{i_0}{\tau\omega} - \frac{\eta}{\tau\omega}$

Finalement : $i(t) = \left[(i_0 - \eta)\cos(\omega t) + \left(\frac{E - Ri_0 - u_0}{L\omega} + \frac{i_0 - \eta}{\omega\tau} \right) \sin(\omega t) \right] e^{-t/\tau} + \eta$

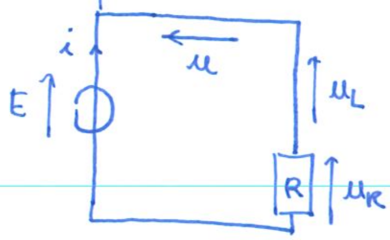
(or $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}$

donc $i(t) = \left[(i_0 - \eta)\cos(\omega t) + \frac{2E - R\eta - 2u_0 - Ri_0}{2L\omega} \sin(\omega t) \right] e^{-\frac{Rt}{2L}} + \eta$)

Exercice 5

1. L'interrupteur est initialement fermé depuis longtemps. On peut considérer que le circuit était en régime stationnaire. La bobine est alors équivalent à un fil et la loi des mailles donne :

Circuit équivalent :



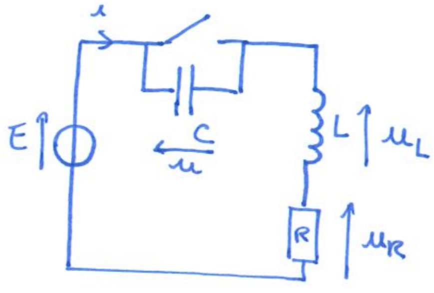
$E = u + u_L + u_R$

$= u_R$ car $u_L = 0$ et $u = 0$

donc $i = \frac{E}{R}$ à $t = 0^-$

Lorsqu'on ouvre soudainement l'interrupteur (K), cela impose une discontinuité du courant dans le circuit. Or la bobine empêche une discontinuité du courant. Il apparait une étincelle de rupture (cf TD Circuits du 1er ordre).

2. La loi des mailles s'écrit :



$E = u + u_L + u_R$

$= u + L\frac{di}{dt} + Ri$

Or le courant traversant C est également i vu que l'interrupteur est ouvert.

donc $i = C\frac{du}{dt}$

D'où $E = u + CL\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt}$

En mettant sous forme canonique, on trouve :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

AN : $Q = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{10\times10^{-3}}{10\times10^{-12}}} \simeq 3200$

La facteur de qualité est bien supérieur à $\frac{1}{2}$, on sera en régime pseudo-périodique.

3. Le polynôme caractéristique s'écrit : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Les racines complexes sont : $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

$$\simeq -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \quad \text{car } Q \gg 1$$

Donc la forme générale des solutions est :

$$u(t) = \left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} + E$$

solution particulière constante

On détermine A et B avec les conditions initiales :

* $u(0^+) = 0$ (car l'interrupteur est fermé, et par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur)

or $u(0) = A + E$ donc $A = -E$

* $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$ car $i(0^+) = \frac{E}{R}$ (par continuité du courant parcourant une bobine)

et $i = C\frac{du}{dt}$

or $\frac{du}{dt}(0) = -\frac{\omega_0 A}{2Q} + B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{E}{\omega_0 RC} - \frac{\omega_0 E}{2Q\omega_0} = E\left(Q - \frac{1}{2Q}\right)$

Donc $u(t) = E - E\left(\cos(\omega_0 t) + \left(\frac{1}{2Q} - Q\right)\sin(\omega_0 t)\right)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$

Or lors des premières oscillations, comme $Q \gg 1$, $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \simeq 1$

(il y a peu d'amortissement)

donc :

$$u(t) = E - E\left(\cos(\omega_0 t) - Q\sin(\omega_0 t)\right)$$

car $\frac{1}{2Q} - Q \approx -Q$

4. Le signal est maximal lorsque $\sin(\omega_0 t) = 1$ (et alors $\cos(\omega_0 t) = 0$)

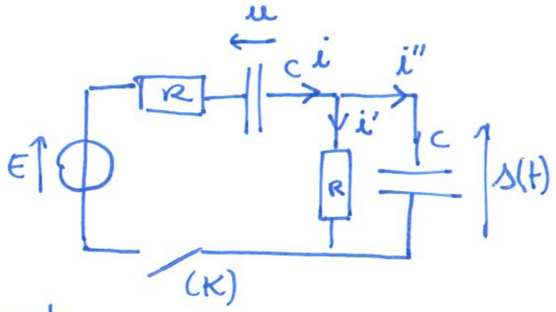
(quand $t = \frac{T_0}{4}$)

et $u_{max} = QE$

AN: $u_{max} = 3200 \times 10 = 32\ kV$

Lorsque la tension u_{max} est atteinte, celle-ci est si importante qu'elle dépasse la tension de claquage. Il apparait une étincelle qui correspond au passage d'un courant entre les deux armatures. Cela met fin aux oscillations (le condensateur est alors déchargé).

Exercice 6



1. Pour $t<0$, les condensateurs sont déchargés et le circuit est ouvert, tous les courants sont nuls. Donc la tension $s(t)$, qui est la tension aux bornes d'une résistance R, est également nulle.

Donc $s(t=0^-) = 0$

Or par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$s(t=0^+) = s(t=0^-) = 0$$

2. $\begin{cases} \text{La loi des noeuds donne : } i = i' + i'' \\ \text{La loi des mailles donne : } E = Ri + u + s \end{cases}$

* Or $i'(t=0^+) = 0$ car $s(t=0^+) = 0$ et $s(t) = Ri'(t)$

donc $i(t=0^+) = i''(t=0^+)$

* Pour $t<0$, les condensateurs sont déchargés.

D'où $u(t=0^-) = 0$

et par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $u(t=0^+) = u(t=0^-) = 0$

* Ainsi $E = Ri(t=0^+) + u(t=0^+) + s(t=0^+)$

or $s(t=0^+) = 0$

D'où $i(t=0^+) = \dfrac{E - u(t=0^+)}{R} = \dfrac{E}{R}$

* Donc $i''(t=0^+) = \dfrac{E}{R}$

or $i''(t) = C\dfrac{ds}{dt}$ donc $\dfrac{ds}{dt}(t=0^+) = \dfrac{i''(t=0^+)}{C} = \dfrac{E}{RC} = \dfrac{E}{\tau}$

avec $\tau = RC$

3. Lorsque $t \to \infty$, on considère que le circuit atteint un régime permanent stationnaire. Les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, les courants sont nuls. Un même raisonnement qu'à la question 1 donne $s(t \to \infty) = 0$

4. Reprenons les lois des noeuds et des mailles écrites à la question 2.

$E = Ri + u + s$ et $i = i' + i''$

or $i' = \dfrac{s}{R}$ et $i'' = C\dfrac{ds}{dt}$ donc $i = \dfrac{s}{R} + C\dfrac{ds}{dt}$

En dérivant la loi des mailles : $R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{du}{dt} + \dfrac{ds}{dt} = 0$

or $i = C\dfrac{du}{dt}$ d'où $R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C} + \dfrac{ds}{dt} = 0$

En combinant les relations :

$$R\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}+C\frac{ds}{dt}\right)+\frac{1}{C}\left(\frac{s}{R}+C\frac{ds}{dt}\right)+\frac{ds}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \quad RC\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+\frac{1}{RC}s=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{3}{RC}\frac{ds}{dt}+\frac{1}{R^2C^2}s=0}$$

Pour mettre sous forme canonique $\underline{\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=0}$

on pose $\begin{cases}\omega_0^2=\dfrac{1}{R^2C^2}\\ \dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{3}{RC}\end{cases}$

cela donne : $\underline{\omega_0=\dfrac{1}{RC}}$ et $\underline{Q=\dfrac{1}{3}}$

Le facteur de qualité est bien sans dimension, et ne dépend pas de R ou de C.

5. Comme $Q<\frac{1}{2}$, on a un régime apériodique.

Les racines du polynôme caractéristique sont réelles. $r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$

$$r_\pm=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2}$$

La solution s'écrit : $s(t)=Ae^{r_+t}+Be^{r_-t}$

Déterminons A et B avec <u>les conditions initiales</u> :

$s(0^+)=0 \Rightarrow A+B=0$

$\dfrac{ds}{dt}(0^+)=\dfrac{E}{RC} \Rightarrow r_+A+r_-B=\dfrac{E}{RC}$

$\Rightarrow \begin{cases}A=-B=\dfrac{E}{RC(r_+-r_-)}\\ B=\dfrac{E}{RC(r_--r_+)}\end{cases}$

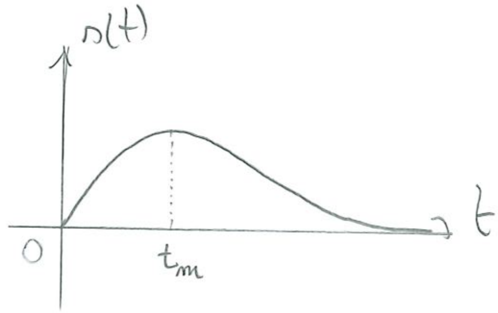
D'où $\underline{s(t)=\dfrac{E}{RC(r_+-r_-)}\left(e^{r_+t}-e^{r_-t}\right)}$

6. Lorsque le maximum est atteint, la dérivée de la fonction s'annule.

Cherchons le temps où $\frac{ds}{dt} = 0$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)}\left(r_+ e^{r_+ t} - r_- e^{r_- t}\right)$$

À $t = t_m$



$$\frac{ds}{dt} = 0 \iff r_+ e^{r_+ t_m} - r_- e^{r_- t_m} = 0$$

$$\iff \frac{r_+}{r_-} = e^{r_- t_m - r_+ t_m}$$

$$\iff \ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right) = (r_- - r_+) t_m$$

$$\iff t_m = \frac{\ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right)}{r_- - r_+}$$

A priori, si la dérivée s'annule, la fonction atteint un extremum. Or d'après l'énoncé, on admet que $s(t)$ admet un maximum, donc t_m correspond à un instant où $s(t)$ atteint un maximum.

Exercice 7

1. (a) Pour $t = 0^-$, l'interrupteur (K) est ouvert, donc $i = 0$

De plus la bobine n'est parcourue par aucun courant, donc $i_2 = 0$

et le condensateur est déchargé, donc $u = 0$

et comme $u = r \times i_3 \Rightarrow i_3 = 0$

Enfin, comme tous les autres courants sont nuls, $i_2 = 0$

(ou sinon on peut dire que le condensateur se comporte comme un inter. ouvert).

(b) Pour $t = 0^+$, par continuité du courant parcourant la bobine : $i_2 = 0$

et par continuité de la tension aux bornes de C : $u = 0$

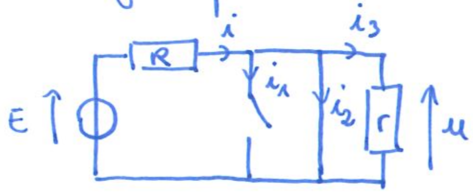
et comme $u = r \times i_3 \Rightarrow i_3 = 0$

Ainsi la loi des noeuds donne $i = i_1$

et la loi des mailles donne $E = Ri + u = Ri$

D'où $\underline{i = i_1 = \frac{E}{R}}$

(c) Pour $t \to \infty$, en supposant un régime permanent stationnaire atteint, le circuit équivalent est :



donc $\underline{u = 0}$ (tension aux bornes d'un fil)

et $\underline{i_1 = 0}$

or $u = r \times i_3 \Rightarrow \underline{i_3 = 0}$

et $i = i_2$ par loi des noeuds

Or $E = Ri + u = Ri$, donc $\underline{i = i_2 = \frac{E}{R}}$

2. Pour $t > 0$, écrivons la loi des noeuds :

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Il faut obtenir une équation avec uniquement i_3 et ses dérivées.

→ i_3 est lié à u par $u = r \times i_3$

→ $i_1 = C\frac{du}{dt} = rC\frac{di_3}{dt}$

→ i_2 est relié à u par $u = L\frac{di_2}{dt}$

→ i est relié à u par la loi des mailles : $E = Ri + u$

$$\Rightarrow i = \frac{E-u}{R}$$

En dérivant la loi des noeuds :

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{E-u}{R}\right) = rC\frac{d}{dt}\left(\frac{di_3}{dt}\right) + \frac{u}{L} + \frac{di_3}{dt}$$

D'où $\quad -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ri_3}{R}\right) = rC\dfrac{d^2i_3}{dt^2} + \dfrac{ri_3}{L} + \dfrac{di_3}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{1}{rC}\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{di_3}{dt} + \frac{r}{rLC}i_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC}i_3 = 0$$

On se ramène à la forme canonique en posant : $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$$

D'où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$Q = \frac{rR}{(r+R)}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

(on peut vérifier que Q est bien sans dimension)

et $\dfrac{d^2i_3}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$

3. Pour avoir un régime pseudo-périodique, il faut $Q > \dfrac{1}{2}$

donc il faut $\dfrac{rR}{(r+R)}\sqrt{\dfrac{C}{L}} > \dfrac{1}{2}$

Pour les valeurs données on trouve : $\dfrac{rR}{(r+R)}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{1{,}25\times10^3\times 2{,}5\times10^3}{(1{,}25\times10^3 + 2{,}5\times10^3)}\sqrt{\dfrac{1{,}0\times10^{-6}}{20\times10^{-3}}}$

$$\simeq 5{,}9 > \frac{1}{2}$$

on respecte bien la condition du régime pseudo-périodique.

4. La pseudo-pulsation est la valeur absolue de la partie imaginaire des racines du polynôme caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}$$

Donc : $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}} = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

et $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\dfrac{1}{\sqrt{1-1/4Q^2}}$

5. La forme générale de la solution est

$$i_3(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$$

Déterminons A et B avec les conditions initiales :

* $i_3(0) = A$ or $i_3(0^+) = 0$, donc $A = 0$

* $\dfrac{di_3}{dt}(0) = \omega B$ or $\dfrac{di_3}{dt}(0^+) = \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dt}(0^+) = \dfrac{1}{rC}i_1(0^+) = \dfrac{E}{rRC}$

en prenant $A=0$ car $u = ri_3$ $i_1 = C\dfrac{du}{dt}$

D'où $B = \dfrac{E}{rRC\omega}$

Finalement : $i_3(t) = \dfrac{E}{rRC\omega}\sin(\omega t)\,e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$