# TD6 Correction

## Exercice 1

1. La force de rappel d'un ressort s'écrit $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}$

Par analyse dimensionnelle : $[F] = [k] \times [l-l_0]$ $\quad ([\|\vec{u}\|] = 1)$

or $[F] = M L . T^{-2}$

$[l-l_0] = L$

Donc $[k] = \dfrac{[F]}{[l-l_0]} = \underline{M.T^{-2}}$

$k$ peut s'exprimer en $\underline{kg.s^{-2}}$ (même si usuellement on utilise plutôt $\underline{N.m^{-1}}$)

2. On suppose $\tau = m^{\alpha} k^{\beta} l_0^{\gamma}$

Déterminons $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ par analyse dimensionnelle.

$[\tau] = T$ $\qquad [k] = M.T^{-2}$

$[m] = M$ $\qquad [l_0] = L$

Donc on obtient l'équation aux dimensions : $T = M^{\alpha}(M.T^{-2})^{\beta} L^{\gamma}$

$$= M^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} L^{\gamma}$$

ce qui donne le système : $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -2\beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Finalement $\underline{\tau = m^{1/2} k^{-1/2} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

3. Pour des oscillations d'une masse au bout d'un ressort, on trouve une pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et une période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Ce résultat est <u>cohérent avec l'analyse dimensionnelle</u> faite (car $[2\pi] = 1$).

# Exercice 2

1. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

On reconnait une équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

La solution s'écrit $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$

Or $z(0) = A \Rightarrow A = z_0$

$\dot{z}(0) = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

D'où $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$

2. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

La solution générale s'écrit $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$

Or $z(0) = A \Rightarrow A = 0$

$\dot{z}(0) = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

D'où $z(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

3. $m\ddot{y} + k(y - l_0) = mg$

On peut réécrire l'équation : $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = g + \frac{kl_0}{m}$

en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ : $\ddot{y} + \omega_0^2 y = g + \frac{kl_0}{m}$ $\left( = \omega_0^2 \left( \frac{g}{\omega_0^2} + l_0 \right) \right)$

La solution générale s'écrit $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_p$

où $y_p$ est une solution particulière constante :

$$y_p = \frac{g}{\omega_0} + l_0$$

Conditions initiales : $y(0) = l_0$ et $\dot{y}(0) = 0$

⚠ il ne faut pas oublier la solution particulière lors de l'utilisation des conditions initiales.

Or $y(0) = A + \frac{g}{\omega_0} + l_0 \Rightarrow A + \frac{g}{\omega_0} + l_0 = l_0$

$\Rightarrow A = -\frac{g}{\omega_0}$

$\dot{y}(0) = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

Finalement : $y(t) = -\frac{g}{\omega_0}\cos(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0} + l_0$

En appliquant le PFD à la masse dans le réf. gal. du laboratoire :

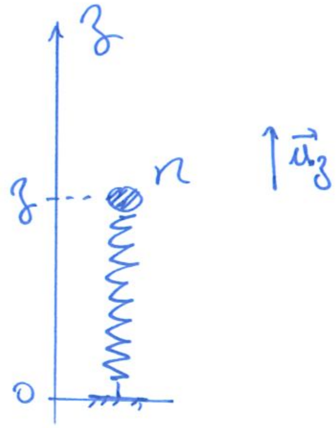
$$m\vec{a} = \vec{F} + \underbrace{\vec{P}}_{\text{poids}} + \underbrace{\vec{R}_N}_{\text{réaction normale}}$$

Selon $\vec{u}_x$ : $m\ddot{x} = -k(x + l_0 - x_H)$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = k(x_H - l_0)$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (x_H - l_0)} \quad \text{avec } \underline{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Cas 3 : La force de rappel qui s'applique sur la masse $n$ s'écrit :




$$\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$$

En appliquant le PFD à la masse dans le réf. gal. du laboratoire :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P}$$

selon $\vec{u}_z$ : $m\ddot{z} = -k(z - l_0) - mg$ $\qquad \vec{P} = -mg\,\vec{u}_z$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + kz = kl_0 - mg$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{kl_0}{m} - g} \quad \text{avec } \underline{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

2. Cas 1 : La solution particulière constante est $x = l_0$

Donc la position d'équilibre est : $\underline{x_{eq} = l_0}$

(ça semble logique, à l'équilibre, le ressort est au repos).

Cas 2 : La position d'équilibre est : $\underline{x_{eq} = x_H - l_0}$

(solution particulière constante)

(De nouveau, le ressort est au repos à l'équilibre).

4. $m\ddot{x} + kx = kl_0$

On réécrit l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0} \qquad \text{où} \quad \underline{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

La forme générale des solutions est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_p$

où $x_p$ est la solution particulière constante : $x_p = l_0$

<u>Conditions initiales</u> : $x(0) = l_0$ , $\dot{x}(0) = v_0$

Or $x(0) = A + l_0 \Rightarrow A = 0$

$\dot{x}(0) = \omega_0 B \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

D'où $\underline{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + l_0}$

## <u>Exercice 3</u>

1. <u>Cas 1</u>


La force de rappel s'appliquant sur la masse s'écrit :

$$\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel galiléen du laboratoire (projeté selon $\vec{u}_x$) :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) \qquad \left(\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = kl_0$$

$$\rightarrow \quad \underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0} \quad \text{avec} \quad \underline{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

<u>Cas 2</u>

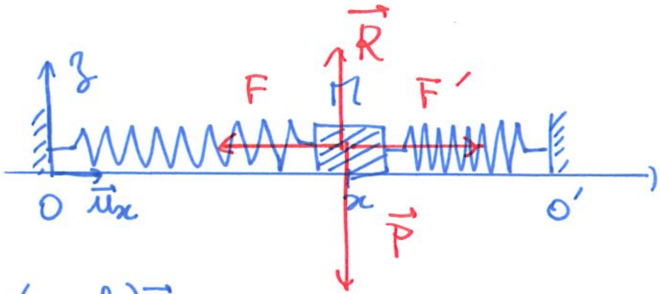

La force de rappel s'écrit : $\vec{F} = -k(x_H - x - l_0)(-\vec{u}_x) = -k(x + l_0 - x_H)\vec{u}_x$

Cas 3 : La position d'équilibre est : $z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$

Ici, le ressort n'est pas au repos à l'équilibre, car le poids de la masse s'applique toujours. À l'équilibre, les forces se compensent (la tension du ressort compense le poids).

## Exercice 4

1. Bilan des forces :




→ poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

→ réaction du support : $\vec{R} = R\vec{u}_z$

→ force du ressort gauche : $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$

→ force du ressort droit : $\vec{F}' = -k'(x_{O'} - x - l_0')(-\vec{u}_x)$

or $x_{O'} = L$

d'où $\vec{F}' = -k'(l_0' + x - L)\vec{u}_x$

On applique le PFD à la masse M dans le réf. gal. du laboratoire :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}'$$

selon $\vec{u}_x$ : $m\ddot{x} = -k(x - l_0) - k'(l_0' + x - L)$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx + k'x = kl_0 + k'(L - l_0')$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{kl_0}{m} + \frac{k'}{m}(L - l_0') \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k + k'}{m}$$

2. La position d'équilibre est la solution particulière constante de l'équation différentielle.

$$x_e = \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{kl_0}{m} + \frac{k'}{m}(L - l_0')\right)$$

$$\Rightarrow x_e = \frac{kl_0 + k'(L - l_0')}{k + k'}$$

si $k = k'$ et $l_0 = l_0'$ $\Rightarrow$ $x_e = \frac{L}{2}$ La position d'équilibre est le centre entre O et O'.

3. En mettant l'équation du mouvement sous forme canonique comme à la fin de la question 1, on trouve : $\omega_0^2 = \dfrac{k+k'}{m}$

Le système est équivalent à un système à un ressort de raideur $K = k+k'$.

4. La solution a pour forme générale :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_e$$

Les conditions initiales sont : $x(0) = x_0$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$

Or $x(0) = A + x_e \Rightarrow A = x_0 - x_e$

$\dot{x}(0) = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

Donc : $x(t) = (x_0 - x_e)\cos(\omega_0 t) + x_e$