TD8 - Correction

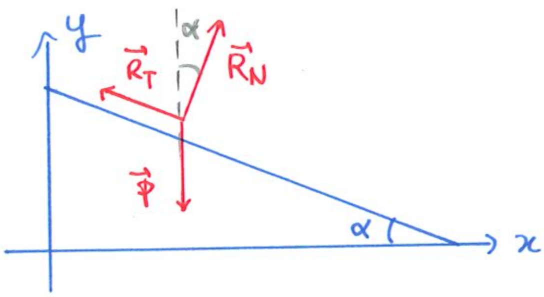
Exercice 1

1. Oui, par exemple avec le cas d'une chute libre (trajectoire parabolique)
   $\vec{a} = \vec{\text{cste}} \not\Rightarrow$ mouvement rectiligne

2. Oui, par exemple, en lançant une balle à la verticale vers le haut. La balle atteint une hauteur maximale, à laquelle la vitesse s'annule, avant de redescendre vers le sol. Cependant, à tout moment la balle est soumise au poids et a donc une accélération $\vec{a} = \vec{g} \neq \vec{0}$.

Exercice 2

Cas 1 :



$\vec{P} = -P\,\vec{e_y}$ P norme du poids

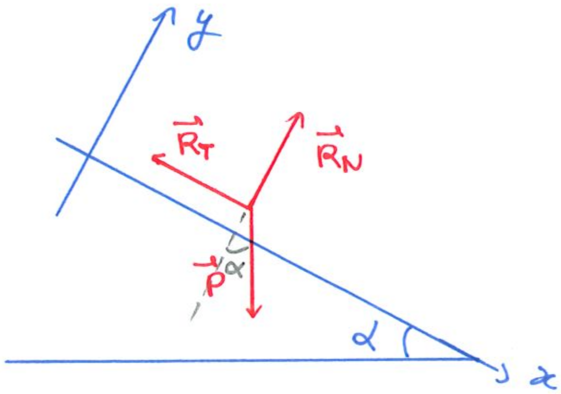
$\vec{R_N} = R_N \sin\alpha\,\vec{e_x} + R_N \cos\alpha\,\vec{e_y}$

$\vec{R_T} = -R_T \cos\alpha\,\vec{e_x} + R_T \sin\alpha\,\vec{e_y}$

⚠ On vérifie nos résultats : si $\alpha = 0$, on trouve bien : $\vec{R_N} = R_N\,\vec{e_y}$
$\vec{R_T} = -R_T\,\vec{e_x}$

si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on trouve bien : $\vec{R_N} = R_N\,\vec{e_x}$
$\vec{R_T} = R_T\,\vec{e_y}$

Cas 2 :



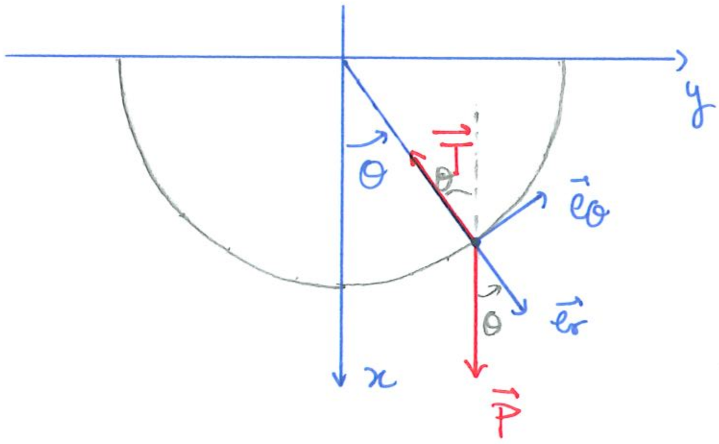
$\vec{R_N} = R_N\,\vec{e_y}$

$\vec{R_T} = -R_T\,\vec{e_x}$

$\vec{P} = P \sin\alpha\,\vec{e_x} - P\cos\alpha\,\vec{e_y}$

⚠ On vérifie nos résultats : si $\alpha = 0$: on trouve bien $\vec{P} = -P\vec{e_y}$
si $\alpha = \frac{\pi}{2}$: on trouve bien $\vec{P} = P\vec{e_x}$

Cas 3 :



Dans la base polaire : $\vec{T} = -T\vec{e_r}$

$\vec{P} = P\cos\theta\,\vec{e_r} - P\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

⚠ Vérification : si $\theta = 0$: on trouve bien $\vec{P} = P\vec{e_r}$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$: on trouve bien $\vec{P} = -P\vec{e_\theta}$

Dans la base cartésienne : $\vec{P} = P\vec{e_x}$

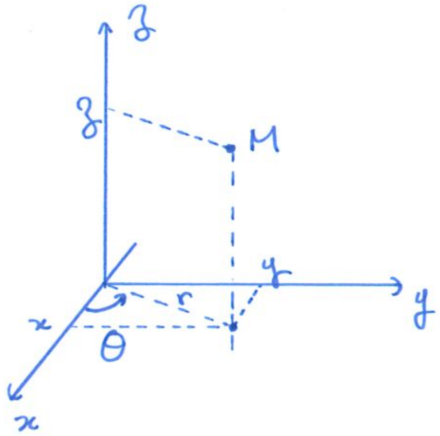
$\vec{T} = -T\cos\theta\,\vec{e_x} - T\sin\theta\,\vec{e_y}$

⚠ Vérification : si $\theta = 0$: $\vec{T} = -T\vec{e_x}$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\vec{T} = -T\vec{e_y}$

Exercice 3

1. On nous donne $\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \\ z = p\omega t \end{cases}$



Or afin de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques, il faut voir comment (x,y) sont liés à (r,θ). Avec un schéma, on voit que :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ on trouve par identification que : $\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$

et on a toujours $z(t) = p\omega t$

2. Afin de déterminer les composantes du vecteur vitesse, repartons du vecteur position :

$$\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$$

donc $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(r\vec{e_r} + z\vec{e_z}\right)$ car $r(t) = R$, $z(t) = p\omega t$

$$= \frac{d}{dt}\left(R\vec{e_r} + p\omega t\,\vec{e_z}\right)$$

$$= R\frac{d\vec{e_r}}{dt} + p\omega\vec{e_z}$$

$= R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + p\omega\vec{e_z}$ or $\dot{\theta}(t) = \dfrac{d}{dt}(\omega t) = \omega$

$$\Rightarrow \underline{\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta} + p\omega\vec{e_z}}$$

Ainsi dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$, on trouve : $\begin{cases} 0 & \text{selon } \vec{e_r} \\ R\omega & \text{selon } \vec{e_\theta} \\ p\omega & \text{selon } \vec{e_z} \end{cases}$

La norme s'écrit : $\underline{\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + (p\omega)^2}}$

Pour le vecteur accélération, on dérive le vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\vec{e_\theta} + p\omega\vec{e_z}\right)$$

$$= R\omega\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \vec{0}$$

$$= R\omega \cdot \dot{\theta}(-\vec{e_r})$$

$\Rightarrow \underline{\vec{a} = -R\omega^2\vec{e_r}}$ La norme s'écrit : $\underline{\|\vec{a}\| = R\omega^2}$

3. Ici, il est possible de dériver directement les composantes (x, y, z) (ce qui n'était pas le cas avec les composantes en coordonnées cylindriques, car les vecteurs $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ ne sont pas fixes).

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = p\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t) \\ \dot{z}(t) = p\omega \end{cases}$$

La norme est $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2 + (p\omega)^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + p^2\omega^2}$

De même, en dérivant de nouveau :

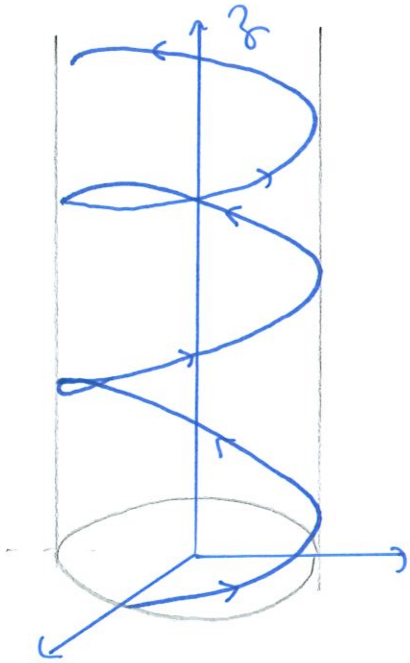
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t) \\ \ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin(\omega t) \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

et la norme est $\|\vec{a}\| = \sqrt{(R\omega^2\cos(\omega t))^2 + (R\omega^2\sin(\omega t))^2}$

$= \underline{R\omega^2}$

On retrouve <u>le même résultat dans les deux bases</u>.

4. Cependant, la base cylindrique est plus adaptée à ce problème, les expressions des vecteurs vitesses et accélérations permettent une meilleure compréhension du mouvement du point M.



La trajectoire du point M est <u>une hélice, de rayon R</u>.

Le mouvement de M est la composition d'un mouvement uniforme selon l'axe z et un mouvement circulaire uniforme.

$$\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta} + p\omega\vec{e_z}$$

mouvement circulaire uniforme, rayon R et vitesse de rotation ω

$p\omega$ = cste
mouvement de translation uniforme selon $\vec{e_z}$.

Exercice 4

1. On nous donne les équations horaires : $\begin{cases} x(t) = At \\ y(t) = 0 \\ z(t) = Bt^2 + Ct \end{cases}$

Comme $y(t) = 0 \ \forall t$, le mouvement est <u>plan</u>.

Or $x = At \Rightarrow t = \frac{x}{A}$

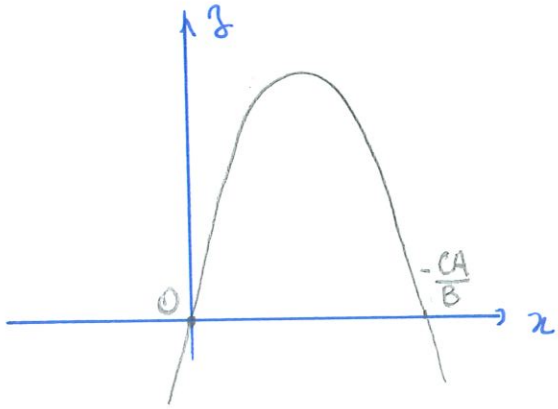
et alors $z = B \cdot \left(\frac{x}{A}\right)^2 + C\left(\frac{x}{A}\right)$

$$\Rightarrow \underline{z(x) = \frac{B}{A^2}x^2 + \frac{C}{A}x}$$

Vérifions l'homogénéité

$$\left[\frac{B}{A^2}x^2\right] = \frac{[B]}{[A]^2}[x]^2 = \frac{L.T^{-2}}{(L.T^{-1})^2} \cdot L^2 = L$$

$$\left[\frac{C}{A}x\right] = \frac{[C]}{[A]}[x] = L \quad \text{car } [A] = [C].$$



C'est une <u>parabole</u>.

2\. Comme $\begin{cases} x(t) = At \\ z(t) = Bt^2 + Ct \end{cases} \xRightarrow{\text{on dérive par rapport à } t} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{z}(t) = 2Bt + C \end{cases}$

et $\underline{\vec{v} = A\vec{e_x} + (2Bt + C)\vec{e_z}}$

3\. Lorsque le point atteint le sommet, sa vitesse selon $\vec{e_z}$ s'annule (la tangente à la trajectoire au sommet est horizontale).

Donc $\underline{\dot{z}(t) = 0 \text{ au sommet}}$

et alors $\underline{\|\vec{v}\| = A}$

4\. Déterminons l'instant t où la masse repasse par $z = 0$:

Comme $z(t) = Bt^2 + Ct$, $\quad z(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{C}{B} \end{cases}$

L'instant où la masse repasse par $z = 0$ est donc $\underline{t = -\frac{C}{B}}$

Or à cet instant, on a $\begin{cases} \dot{x}(t = -\frac{C}{B}) = A \\ \dot{z}(t = -\frac{C}{B}) = 2 \cdot B\left(-\frac{C}{B}\right) + C = -C \end{cases}$

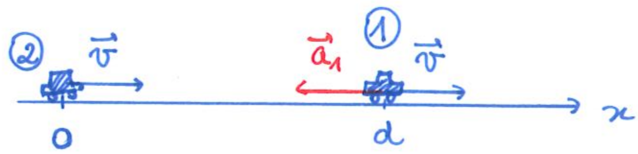
Donc $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{A^2+C^2}$

5. Or c'est la même vitesse qu'à $t=0$.

car $\begin{cases} \dot{x}(t=0) = A \\ \dot{z}(t=0) = C \end{cases} \Rightarrow \|\vec{v}(t=0)\| = \sqrt{A^2+C^2}$

Exercice 5

À $t=0$



1. Notons $x_1(t)$ la position de la voiture ① et $x_2(t)$ la position de la voiture ② au cours du temps.

D'après l'énoncé, à $t \in [0,\tau[$: $\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = a_1 \\ \ddot{x}_2(t) = 0 \end{cases}$

et pour $t \geqslant \tau$: $\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = a_1 \\ \ddot{x}_2(t) = a_2 \end{cases}$ ← car ② commence à freiner après un temps τ.

Position de la voiture ① :

* Comme $\ddot{x}_1(t) = a_1$

  alors $\dot{x}_1(t) = a_1 t + A$, A constante d'intégration

  or à $t=0$, $\dot{x}_1(0) = v$

  D'où $A = v$ et $\dot{x}_1(t) = a_1 t + v$

* En intégrant $\dot{x}_1(t)$ par rapport au temps :

  $x_1(t) = a_1 \cdot \frac{t^2}{2} + vt + A'$, A' constante d'intégration.

  Or à $t=0$, $x_1(0) = d$

  D'où $A' = d$ et $x_1(t) = a_1 \frac{t^2}{2} + vt + d$

Position de la voiture ②:

Pour $t \in [0,\tau[$: $\ddot{x}_2(t) = 0$

donc $\dot{x}_2(t) = B$ constante

or $\dot{x}_2(0) = v$ d'où $\dot{x}_2(t) = v$

et alors $x_2(t) = vt + B'$, B' constante

et comme $x_2(0) = 0$, $B' = 0$ et alors $x_2(t) = vt$

(et en particulier, à $t=\tau$, $x_2(\tau) = v\tau$)

Pour $t > \tau$: $\ddot{x}_2(t) = a_2$

- par intégration, on trouve $\dot{x}_2(t) = a_2 t + C$, C constante

or $t=\tau$, $\dot{x}_2(\tau) = v = a_2 \cdot \tau + C \Rightarrow C = v - a_2\tau$

donc $\dot{x}_2(t) = a_2 t + v - a_2\tau \Rightarrow \dot{x}_2(t) = a_2(t-\tau) + v$

- par intégration, on obtient : $x_2(t) = \frac{a_2}{2}(t-\tau)^2 + vt + C'$, C' constante

or à $t=\tau$, $x_2(\tau) = v\tau$, et donc $v\tau + C' = v\tau$

$\Rightarrow C' = 0$

Finalement $x_2(t) = \frac{a_2}{2}(t-\tau)^2 + vt$

2. Il y a collision lorsque $x_1(t) = x_2(t)$

Si l'on suppose que $t_{col} > \tau$, alors :

$$\frac{a_2}{2}(t_{col}-\tau)^2 + \cancel{v t_{col}} = a_1 \frac{t_{col}^2}{2} + \cancel{v t_{col}} + d$$

$$\Rightarrow \frac{(a_2-a_1)}{2} t_{col}^2 + \left(-a_2\tau\right) t_{col} - d + \frac{a_2\tau^2}{2} = 0$$

On résout le polynôme pour déterminer t_{col}.

Il faut que $\Delta = a_2^2\tau^2 - 4\left(-d + \frac{a_2\tau^2}{2}\right)\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right) > 0$

$\Leftrightarrow a_2^2\tau^2 - (a_2\tau^2 - 2d)(a_2-a_1) > 0$

$\Leftrightarrow a_1 a_2 \tau^2 + 2d(a_2-a_1) > 0$ C'est bien le cas avec les données de l'énoncé.

Donc $t_{col} = \dfrac{a_2 \tau + \sqrt{\Delta}}{a_2 - a_1}$ (la solution $\dfrac{a_2\tau - \sqrt{\Delta}}{a_2 - a_1}$ serait négative)

AN : $t_{col} = \dfrac{-1{,}0 \times 2 + \sqrt{-1{,}0 \times -2{,}0 \times 2^2 + 2 \cdot 80 \cdot (-1+2)}}{-1{,}0 - (-2{,}0)} \simeq \underline{11\,s}$

et alors $x_1(t_{col}) = x_2(t_{col}) = \dfrac{a_2}{2}(t_{col} - \tau)^2 + v\, t_{col}$

AN : $x_2(t_{col}) = \dfrac{-1{,}0}{2}(11-2)^2 + 30 \times 11 \simeq \underline{290\,m}$

La collision a lieu à l'instant $t_{col} \simeq 11 s$, à la position $x_{col} \simeq 290 m$.

Exercice 6

1\. D'après l'énoncé
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_x = \dfrac{z(t)}{\tau} \\ \dot{z}(t) = v_0 \text{ constante} \end{cases}$$

Or $\underline{\dot{z}(t) = v_0} \Rightarrow z(t) = v_0 t + z(0)$

or $z(0) = 0$, d'où $\underline{z(t) = v_0 t}$

équation différentielle sur $z(t)$

solution.

2\. Comme $\dot{x}(t) = \dfrac{z(t)}{\tau}$ et $z(t) = v_0 t$

alors $\underline{\dot{x}(t) = v_0 \dfrac{t}{\tau}}$ (équ différentielle sur $x(t)$)

On résout en intégrant par rapport au temps :

$x(t) = \dfrac{v_0}{2\tau} t^2 + x(0)$

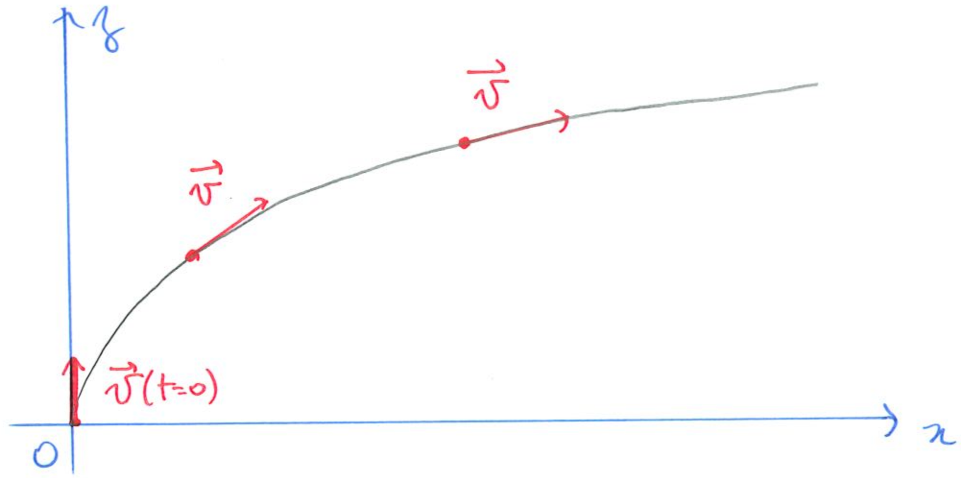
Or $x(0) = 0$, donc $\underline{x(t) = \dfrac{v_0}{2\tau} t^2}$

3. Comme $x = \frac{v_0}{2\tau} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\tau x}{v_0}}$

alors $z = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2\tau x}{v_0}} = \sqrt{2\tau v_0 x}$

$\Rightarrow \underline{z(x) = \sqrt{2 v_0 \tau x}}$ Voici l'équation de la trajectoire.

4.



5. Connaissant : $\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \frac{t}{\tau} \\ \dot{z}(t) = v_0 \end{cases}$

On trouve : (on dérive par rapport au temps) $\begin{cases} \underline{\ddot{x}(t) = \frac{v_0}{\tau}} \\ \underline{\ddot{z}(t) = 0} \end{cases}$

L'accélération est uniquement selon $\vec{e_x}$ (et $\frac{v_0}{\tau}$ est bien homogène à une accélération).

<u>Exercice 7</u>

1. D'après l'énoncé : $\begin{cases} x(t) = 4t^2 \\ y(t) = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \\ z(t) = 3t + t^3 \end{cases}$ en coordonnées cartésiennes.

alors on détermine les coordonnées du vecteur vitesse en dérivant chaque composante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 8t \\ \dot{y}(t) = 4(1-t^2) \\ \dot{z}(t) = 3(1+t^2) \end{cases}$$

et alors
$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \\ &= \sqrt{(8t)^2+(4(1-t^2))^2+(3(1+t^2))^2} \\ &= \sqrt{64t^2+16(1-2t^2+t^4)+9(1+2t^2+t^4)} \\ &= \sqrt{25t^4+50t^2+25} \\ &= 5(t^2+1) \end{aligned}$$

2. La tangente d'une trajectoire a la même direction que celle du vecteur vitesse (car le vecteur vitesse est constamment tangent à la trajectoire).

La question revient donc à déterminer l'angle entre l'axe (Oz) et le vecteur vitesse $\vec{v}$. On peut le faire apparaître grâce à un produit scalaire. Par définition, l'angle recherché est l'angle θ tel que : $\vec{v}\cdot\vec{e_z} = \|\vec{v}\|\|\vec{e_z}\|\cos(\theta)$

Or $\|\vec{e_z}\| = 1$ (vecteur unitaire)

et $\vec{v}\cdot\vec{e_z} = \dot{z}(t)$ = composante de $\vec{v}$ selon $\vec{e_z}$

On obtient $\dot{z}(t) = \|\vec{v}\|\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\dot{z}(t)}{\|\vec{v}\|} = \frac{3(1+t^2)}{5(1+t^2)} = \frac{3}{5}$$

L'angle θ est constant au cours du temps.

Exercice 8

1. Comme $T = 24\,h$

et $1\,h = 60\,min = 60 \times 60\,s$

Alors $T = 24 \times 3600 = 86\,400\,s$

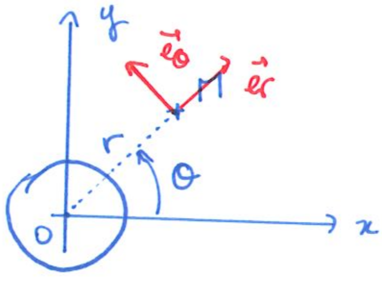
2. La vitesse angulaire est ici constante.

Or pendant une durée T, la Terre tourne d'un angle 2π.

donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ⟵ on peut direct écrire la formule sinon (car elle est à connaître par cœur)

AN: $\omega = \dfrac{2\pi}{86400} \simeq \underline{7{,}27.10^{-5}\ \text{rad.s}^{-1}}$

3. Deux méthodes possibles :



* En utilisant les coordonnées polaires : (le mouvement est plan)

$\vec{OM} = r\vec{e_r}$ avec r constant (car mouvement circulaire)

donc $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = r\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

or $\dot{\theta} = \omega$ par définition : $\vec{v} = r\omega\vec{e_\theta}$

et enfin : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = r\omega\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ car r et ω sont constants

$$= r\omega^2(-\vec{e_r})$$
$$= -r\omega^2\vec{e_r}$$

donc $\|\vec{a}\| = r\omega^2$

or $a = g_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^2$ d'où $r\omega^2 = g_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^2$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{g_0R^2}{\omega^2}$$

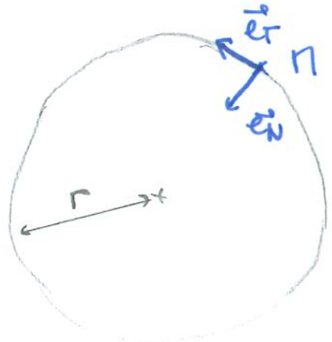
L'altitude H est alors $r-R$, d'où $\underline{H = r - R = \left(\dfrac{g_0R^2}{\omega^2}\right)^{1/3} - R}$

AN: $H = \left(\dfrac{9{,}8 \times (6400.10^3)^2}{(7{,}27.10^{-5})^2}\right)^{1/3} - (6400.10^3)$

$\underline{H \simeq 36\,000 \text{ km}}$

* En utilisant le repère de Frenet :

En tout point, dans le repère de Frenet, l'accélération s'écrit dans la base locale de Frenet :



$$\vec{a} = a_T \vec{e_T} + a_N \vec{e_N}$$
$$= \frac{dv}{dt}\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}\vec{e_N}$$

où v = norme de la vitesse.

Or le mouvement est uniforme, donc $\frac{dv}{dt} = 0$

et en tout point $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{e_N}$

et comme le mouvement est circulaire, $R = r$ = constante au cours du mouvement, et $v = r\omega$

ainsi $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$

On refait alors le même raisonnement qu'en coordonnées polaires pour conclure.

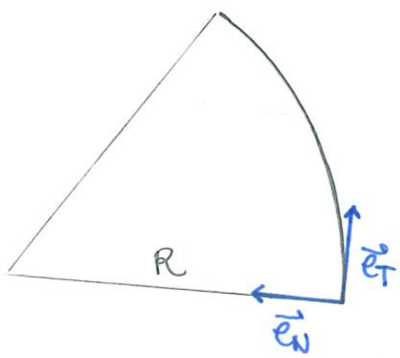
Exercice 9

1. Déterminons la norme de l'accélération de la voiture dans la bretelle.

On suppose que <u>sa vitesse est constante à V_0</u>.

En utilisant le repère de Frenet, on a :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}\vec{e_N}$$



où R serait le rayon de la bretelle, car en tout point, le rayon de courbure sera R.

et $\frac{dv}{dt} = 0$ car le mouvement est uniforme.

Donc : $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{e_N}$ et $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R} = \frac{V_0^2}{R}$

<u>AN</u>: $\|\vec{a}\| = \frac{\left(110 \cdot \frac{1}{3,6}\right)^2}{50} \simeq 19\,m.s^{-2}$ Donc $\|\vec{a}\| > a_{max}$

La voiture va déraper dans la bretelle.

2. Reprenons l'expression de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_N \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

Or lorsque la voiture s'engage dans la bretelle à la vitesse V_0. Si la voiture freine en plus, alors au moment où elle s'engage :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V_0^2}{R}\right)^2} > \frac{V_0^2}{R} \quad \text{car} \quad \frac{dv}{dt} \neq 0$$

L'accélération serait encore plus grande qu'à la question précédente. Cela augmente le risque de sortir de la route.

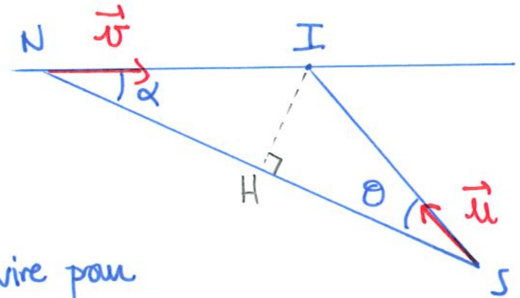
3. Si l'on considère que la voiture a un mouvement uniforme dans la bretelle (v = cste), il faut donc que $\|\vec{a}\| < a_{max}$

$$\Rightarrow \frac{V_0^2}{R} < a_{max}$$

$$\rightarrow V_0 < \sqrt{R a_{max}} = V_{max}$$

AN : $V_{max} = \sqrt{R a_{max}} = \sqrt{50 . 10} \simeq 22 \, m.s^{-1} = 80 \, km.h^{-1}$

Exercice 10



1. Supposons que la torpille atteigne le navire au point I.

Cela signifie que le temps Δt que prend le navire pour parcourir NI est le même que celui que prend la torpille pour parcourir IS.

ainsi $\dfrac{NI}{v} = \dfrac{IS}{u}$ (*)

Or en appelant H le projeté orthogonal de I sur (NS), on peut écrire les relations :

$\sin\alpha = \dfrac{IH}{NI}$ et $\sin\theta = \dfrac{IH}{IS}$

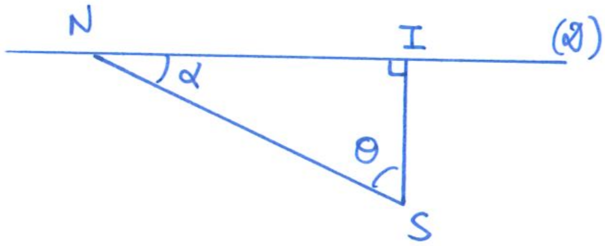
D'où $\sin\alpha \, NI = \sin\theta \, IS$ (**)

Finalement (*) et (**) donnent : $v \sin\alpha = u \sin\theta$

Cela impose une condition sur θ si l'on souhaite couler N.

2. Pour que T atteigne N en un temps minimum, il faut que la distance IS soit minimale. C'est le cas si I est le projeté orthogonal de S sur $(\mathcal{D})$

Or ainsi $\tan\alpha = \dfrac{IS}{NI} = \dfrac{u}{v}$ ← d'après (*)



Il convient de tirer lorsque $\alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{v}\right)$

Or $\tan\theta = \dfrac{NI}{IS} = \dfrac{v}{u} \Rightarrow \theta = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ ← d'après (*)

Exercice 11

1. Initialement, le triangle est équilatéral.
Le problème étant inchangé par la permutation $\{A \to B, B \to C, C \to A\}$, cela signifie que le triangle à tout moment équilatéral.

Rq : Si l'on étudie $l_1(t) = AB$ et $l_2(t) = BC$.
Comme le problème est inchangé par le changement $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, cela mène à un nouveau problème dans lequel la longueur AB correspondrait à $l_2(t)$ comme défini dans le problème initial. Donc $l_1(t) = l_2(t)$

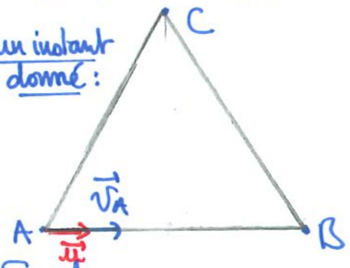
2. Soit $l(t)$ la longueur d'un côté du triangle.

Donc $l(t) = \|\vec{AB}\| = \vec{AB}\cdot\vec{u}$ où $\vec{u}$ vecteur unitaire selon $\vec{AB}$

donc $\vec{u} = \dfrac{\vec{AB}}{l}$

de même $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}_A}{v}$ car $\vec{v}_A$ est selon $\vec{u}$ (A va vers B)

À un instant donné :



donc $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{d\vec{AB}}{dt}\cdot\vec{u} + \vec{AB}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt}$

or $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{1}{v}\dfrac{d\vec{v}_A}{dt}$ car $v = $ cste

$= \dfrac{\vec{a}_A}{v}$ or dans un repère de Frenet,

$$\vec{a}_A = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_N$$

$$= \frac{v^2}{R}\vec{e}_N \quad \text{car } \frac{dv}{dt} = 0$$

donc à tout instant :

$\dfrac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{e}_T$ or $\vec{e}_T = \vec{u}$ à tout instant

donc $\vec{AB}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} = l\,.\,\vec{u}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{dt} = 0$

et donc $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{d\vec{AB}}{dt}\cdot\vec{u}$.

Rq : on aurait pu arriver plus rapidement à ce résultat, en calculant astucieusement :

$$\frac{d(l^2)}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{AB}) = \vec{AB}\cdot\frac{d\vec{AB}}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}\cdot\vec{AB}$$

$$= 2\vec{AB}\cdot\frac{d\vec{AB}}{dt}$$

or $\dfrac{d(l^2)}{dt} = 2l\dfrac{dl}{dt}$, d'où $2l\dfrac{dl}{dt} = 2\vec{AB}\cdot\dfrac{d\vec{AB}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{\vec{AB}}{l}\cdot\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{u}\cdot\frac{d\vec{AB}}{dt}$$

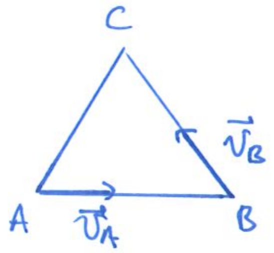
Or $\dfrac{d\vec{AB}}{dt} = \dfrac{d(\vec{OB} - \vec{OA})}{dt}$ où O fixe dans le référentiel d'étude.

$= \vec{v}_B - \vec{v}_A$

Donc finalement :

$$\frac{dl}{dt} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{u}$$
$$= (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \frac{\vec{v}_A}{v}$$
$$= \frac{\vec{v}_B \cdot \vec{v}_A}{v} - \frac{\vec{v}_A^{\,2}}{v}$$

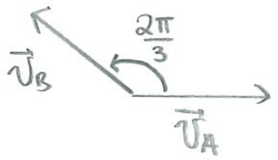
$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dl}{dt} = \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}{v} - v}$$



3. Calculons $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B$:

Comme $\vec{v}_A$ selon $\vec{AB}$

et $\vec{v}_B$ selon $\vec{BC}$



On trouve par construction que l'angle entre les deux vecteurs est $\frac{2\pi}{3}$.

Donc $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = v^2 . \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{-\frac{v^2}{2}}$

Ainsi $\frac{dl}{dt} = -\frac{v}{2} - v \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{dl}{dt} = -\frac{3v}{2}}$

En intégrant, on trouve $l(t) = -\frac{3v}{2}t + l(0)$

or $l(0) = d$, d'où $\underline{l(t) = d - \frac{3v}{2}t}$

À $t = t_f$, $l(t_f) = 0$, d'où $\underline{t_f = \frac{2d}{3v}}$

4. Se déplaçant à vitesse constante, chaque chien parcourt une distance $D = v \times t_f$

$$\Rightarrow \underline{D = \frac{2}{3}d}$$

Rq: plus rigoureusement, on peut dire que $\dot{s}(t) = v$, où $s(t)$ est l'abscisse curviligne : alors $s(t) = v.t$ $(s(0) = 0)$

et $s(t_f) = v.t_f = \frac{2}{3}d$.

trajectoire du chien A :