TD9 – **Dynamique**

EXERCICE 1 : Profondeur d'un puits (⋆)

Pour connaître la profondeur H d'un puits, on lâche sans vitesse initiale une pierre. Le son du choc de la pierre contre le fond du puits est perçu au bout d'une durée $T = 7,30$ s après le lâcher de la pierre. La vitesse du son dans l'air valant $c = 340$ m.s^{-1} , calculer H. On prend $g = 9,81$ m.s^{-2}.

EXERCICE 2 : Fusée balistique (⋆)

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m, est mise à feu à la surface de la Terre, avec une vitesse v_0, faisant un angle α avec l'horizontale. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.

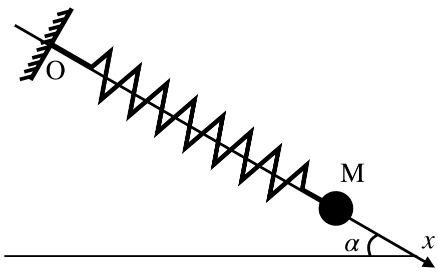
1. On néglige en première approximation la résistance de l'air. Établir l'équation de la trajectoire. Exprimer la portée OC puis la flèche AH (A point d'altitude maximale, H sa projection sur l'horizontale) en fonction de v_0, α et g.
   A.N. : Calculer la portée maximale et la hauteur maximale alors atteinte si $v_0 = 1$ km.s^{-1}.
2. Écrire l'équation vérifiée par l'angle de tir α pour que la trajectoire passe par un point B de l'espace de coordonnées (x_B, z_B).
   A.N. : Calculer α pour $x_B = 73,2$ km et $z_B = 19,6$ km si v_0 a la valeur précédente.
3. On tient compte maintenant de la résistance de l'air, opposée à la vitesse de la fusée : $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec h constante positive. Établir les équations paramétriques $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de M.

EXERCICE 3 : Équilibre sur un plan incliné (⋆)

On pose sans vitesse initiale une brique de masse m sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On note μ_0 et μ les coefficients de frottement solide statique et dynamique.

1. Montrer qu'il existe une condition sur α pour que la masse puisse rester en équilibre sur le plan incliné. On déterminera l'expression de l'angle critique α_0.
2. On suppose que cette condition n'est pas remplie. En déduire le mouvement de la brique le long du plan incliné.

EXERCICE 4 : Ressort sur plan incliné (⋆)

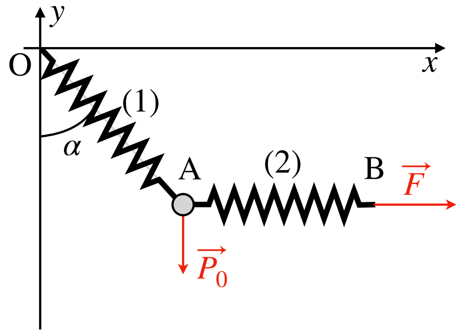


On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné. Soit un axe (Ox) sur le plan incliné.

1. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de ℓ_0, m, g, k et α.
2. À partir de la position d'équilibre, M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur (Ox) et lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_e.

EXERCICE 5 : Équilibre avec ressorts (⋆)

On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos L. Chacun, soumis à un poids P_0, prend un allongement ℓ_0, déterminé par leur raideur commune k. On suspend un poids P_0 à l'un des ressorts (noté (1)) et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort (noté (2)), que l'on tire avec un force variable F. Le ressort (1) fait un angle α avec la verticale. Pour chaque valeur de α correspondant à une force F, le ressort (1) prend un allongement ℓ_1, et le ressort (2) un allongement ℓ_2.



Exprimer les allongements ℓ_1 et ℓ_2 en fonction de α et ℓ_0.

EXERCICE 6 : Tension d'une corde pour divers mouvements (⋆)

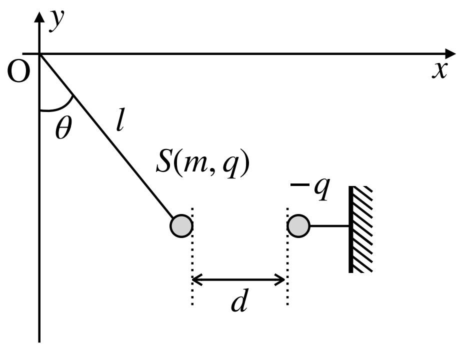
1. Une pierre de masse m est attachée au bout d'une corde très légère de longueur ℓ_0. Lorsque la pierre est en équilibre, exprimer la norme de la tension de la corde T.

2. La pierre est mise en mouvement circulaire de rayon $R = \ell_0$ dans le plan vertical. Lorsque la pierre passe par le point le plus bas, la tension de la corde T_0 est égale à trois fois le poids de la pierre. En déduire la vitesse v_0 de la pierre en ce point ainsi que la vitesse v_1 et la tension de la corde T_1 au point le plus haut.

3. La pierre, toujours accrochée au bout de la corde dont l'autre extrémité est fixe, décrit désormais un mouvement circulaire horizontal à la vitesse uniforme v_0. Calculer la tension de la corde. Quel angle la corde forme-t-elle avec la verticale ?

EXERCICE 7 : Équilibre électrostatique (⋆⋆)

Un pendule est constitué d'une petite sphère S, de masse $m = 45\,\text{g}$, attachée au bout d'un fil idéal de longueur l. On impose à cette sphère une charge électrique positive q que l'on souhaite déterminer.
D'autre part, une autre sphère chargée avec une charge opposée $-q$ est placée au voisinage du pendule : celui-ci s'écarte alors de la verticale d'un angle θ. On supposera que les 2 sphères sont à la même hauteur.



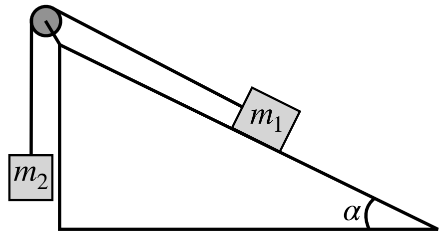
On rappelle que la force d'interaction électrostatique qu'une charge q_1 exerce sur une charge q_2 distante de r s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}}$$

On mesure les valeurs suivantes : $\theta = 36°$ et $d = 22\,\text{cm}$. La permittivité électrique de l'air est pratiquement égale à celle du vide : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\text{F}\,\text{m}^{-1}$.

Que vaut la valeur de la charge q ?

Exercice 8 : Masses reliées par une poulie (★★)



Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil inextensible de masse négligeable. La masse m_1 glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle α et la masse m_2 a un déplacement vertical, le fil glissant sans frottement sur une poulie idéale.

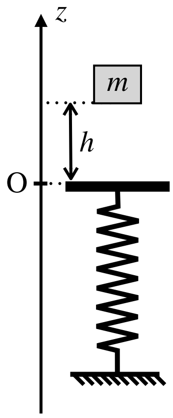
1. Déterminer les accélérations des masses m_1 et m_2.
2. Exprimer la tension T du fil.
3. Déterminer la réaction R du plan incliné sur la masse m_1.

Exercice 9 : Mouvement d'un satellite (★★)

On considère un satellite modélisé par un point M en orbite circulaire autour de la Terre. On note h son altitude et m sa masse. La Terre est modélisée par une boule de contre O, de masse M_T et de rayon R_T.

1. Faire un schéma et introduire la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée au satellite.
2. Exprimer dans cette base le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ainsi que le vecteur vitesse $\vec{v}$ du satellite en fonction des données et de θ (et de ses dérivées).
3. Exprimer le vecteur accélération du satellite.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
5. Exprimer la vitesse du satellite en fonction de G (constante de gravitation universelle), M_T, R_T et h.

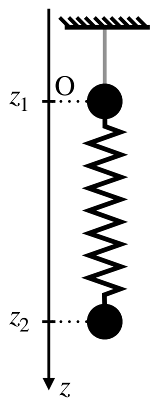
Exercice 10 : Chute d'une masse sur un plateau à suspension (★★)



On lâche une masse m sans vitesse initiale d'une hauteur h au dessus d'un plateau de masse nulle. Ce dernier repose sur un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On prend comme origine de l'axe (Oz) vertical ascendant la position du plateau au repos, comme le montre la figure ci-contre.

Déterminer le mouvement ultérieur de la masse m.

Exercice 11 : Modélisation simple d'un slinky (★ ★ ★)



On considère deux masses m reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. La masse supérieure est initialement accrochée à un support fixe par un fil et le tout est au repos comme le montre la figure ci-contre. On choisit l'origine des altitudes à la position initiale de la première masse.

1. Déterminer les valeurs de z_1 et z_2 les altitudes avant que le fil n'ait été coupé.
2. On pose $\ell = z_2 - z_1$ et $z = \frac{z_1+z_2}{2}$.
   À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir les équation différentielles portant sur $\ell(t)$ et $z(t)$ une fois que le fil a été coupé.
3. Déterminer les expressions de $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

EXERCICE 12 : Arrêt d'une voiture ($\star\star\star$)

On donne : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$ et $\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)|$.

Une voiture de masse m circule sur une route rectiligne horizontale à la vitesse constante $\overrightarrow{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. À l'instant $t = 0$, la voiture se trouve en O ; le chauffeur passe alors au point mort et attend l'arrêt de son véhicule sans actionner la pédale de frein. La voiture est soumise à :

- ▷ une force $\overrightarrow{F_1}$, de frottements solides dus aux contacts entre les roues et la route que l'on supposera obéir aux lois de Coulomb (facteur de frottement μ) ;
- ▷ une force de frottements visqueux dus aux contacts entre la voiture et l'air de masse volumique ρ : $\overrightarrow{F_2} = -\frac{1}{2}\rho C_x S||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}$.

A.N. : $\mu = 0,02$; $S = 3\,\mathrm{m}^2$; $C_x = 0,3$; $\rho = 1,3\,\mathrm{kg.m}^{-3}$; $m = 600\,\mathrm{kg}$ et $v_0 = 72\,\mathrm{km/h}$.

1. On pose $\overrightarrow{F_1} = -m\alpha\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{F_2} = -m\beta v^2\vec{e}_x$. Calculer α et β.

2. Au bout de quelle durée τ la voiture s'arrête-t-elle ? Quelle distance d a-t-elle alors parcourue ?

3. Quels résultats obtiendrait-on si $\overrightarrow{F_1} = \vec{0}$? si $\overrightarrow{F_2} = \vec{0}$?