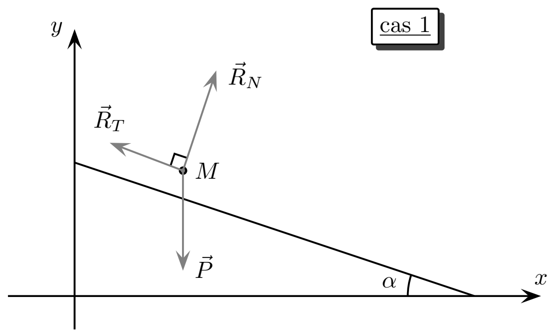
TD8 – Cinématique

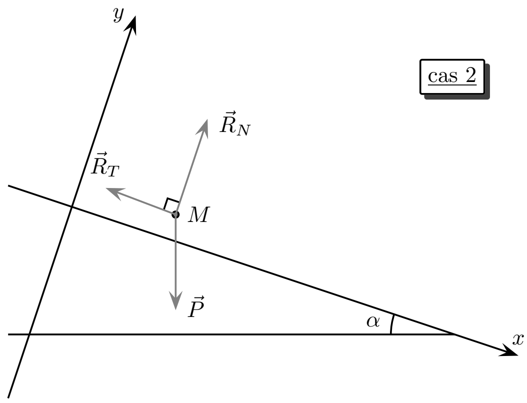
EXERCICE 1 : Des petites questions (⋆)

1. Un mobile dont l'accélération conserve une même direction peut-il avoir un mouvement curviligne plan ?
2. Un mobile peut-il avoir une accélération non nulle en un instant où sa vitesse est nulle ?

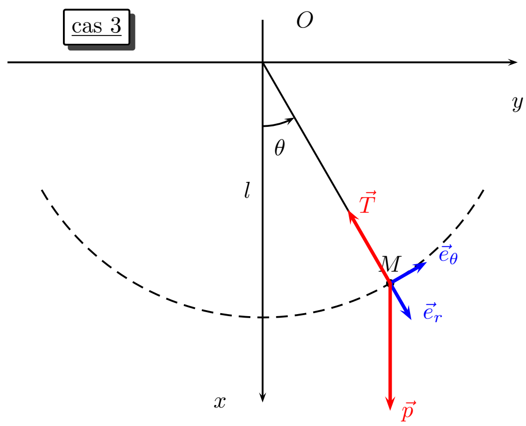
EXERCICE 2 : Manipulation de vecteur coordonnées (⋆)

Dans chaque cas suivant, projeter les forces selon la base choisie (cartésienne : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; cylindro-polaires : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$) en fonction de l'angle présent sur la figure.
Pour un vecteur $\vec{A}$, on notera A sa norme et A_x sa composante selon x ($A_x = \vec{e}_x \cdot \vec{A}$ et idem pour les autres composantes). Attention à vérifier les résultats dans les cas limites où l'angle vaut 0 ou $\frac{\pi}{2}$.





Dans le cas suivant, projeter les forces sur la base polaire et ensuite sur la base cartésienne.



EXERCICE 3 : Mouvement hélicoïdal (⋆)

La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cartésiennes : $x(t) = R\cos(\omega t)$, $y(t) = R\sin(\omega t)$ et $z(t) = p\omega t$ où p, R et ω sont des constantes positives.

1. Déterminer les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire les expressions de $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$.

2. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans la base cylindrique. Calculer leurs normes.

3. Même question mais dans la base cartésienne.

4. Laquelle de ces deux bases vous paraît-elle être la plus appropriée?

EXERCICE 4 : Mouvement en coordonnées cartésiennes ($\star$)

On considère un point M dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes : $x(t) = At$, $y(t) = 0$ et $z(t) = Bt^2 + Ct$ avec $A = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $B = -10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $C = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

On déterminera les grandeurs demandées en fonction de A, B et C avant de faire les applications numériques, ce qui permettra de vérifier l'homogénéité des résultats.

1. Déterminer l'équation cartésienne $z = z(x)$ de la trajectoire et la représenter. Comment s'appelle une telle courbe?
2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$.
3. Quelle est la valeur de la vitesse au sommet S de la trajectoire?
4. Quelle est la valeur de la vitesse lorsque M repasse par le plan $z = 0$?
5. Comparer alors cette vitesse avec la vitesse initiale.

EXERCICE 5 : Collision entre deux voitures ($\star$)

Deux voitures se suivent sur une ligne droite à la vitesse de $v = 30\,\mathrm{m.s^{-1}}$ à une distance $d = 80\,\mathrm{m}$ l'une de l'autre. À la date $t = 0$, la première freine avec une décélération constante $a_1 = -2{,}0\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Celle qui suit commence son freinage $\tau = 2\,\mathrm{s}$ plus tard, avec une décélération de $a_2 = -1{,}0\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

1. En prenant pour origine du repère spatial la position de la second voiture à la date $t = 0$, établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules.
2. Déterminer la position et la date du contact.

EXERCICE 6 : Ballon sonde ($\star$)

On modélise un ballon sonde par un point matériel de coordonnées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée suivant l'axe (Ox), et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$ où $\tau > 0$ est homogène à un temps.

1. Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

2. Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, à exprimer en fonction de v_0 et τ.

3. En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire du ballon sonde.

4. Représenter cette trajectoire, et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.

5. Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

EXERCICE 7 : Trajectoire sous forme paramétrique (⋆)

Par rapport à un repère fixe orthonormé (O, x, y, z), on considère un point mobile dont la trajectoire (H) est donnée en fonction du temps par les équations :

$$x(t) = 4t^2 \qquad y(t) = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \qquad z(t) = 3t + t^3$$

1. Exprimer le vecteur vitesse. Donner l'expression de sa norme.

2. (⋆⋆⋆) Montrer que la tangente à la trajectoire (H) fait un angle constant avec l'axe $(\mathrm{O}z)$.

EXERCICE 8 : Satellite géostationnaire (⋆⋆)

Dans le référentiel géocentrique, un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre dans le plan équatorial.
La période de révolution T du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même, on considérera que le jour sidéral est à peu près égal ou jour solaire, soit $T \approx 24$h. Ainsi, ce satellite est toujours à l'aplomb du même point de la surface de la Terre. Il ressent dans le référentiel géocentrique une accélération de norme

$$a = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2,$$

où $R = 6400\,\mathrm{km}$ est le rayon de la Terre, $g_0 = 9.8\,\mathrm{ms^{-2}}$ et r est le rayon de l'orbite du satellite.

1. Calculer la période de rotation T de la Terre en seconde.
2. En déduire sa vitesse angulaire ω.
3. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire..

EXERCICE 9 : Bretelle d'autoroute (⋆⋆)

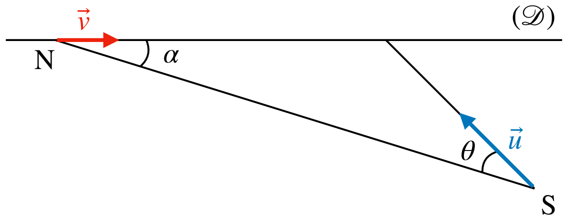
Un conducteur, au volant de son automobile, que l'on assimilera a un point matériel, se déplace sur l'autoroute à la vitesse $V_0 = 110\,\mathrm{km/h}$. Il souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50\,\mathrm{m}$.

Pour éviter de déraper dans la bretelle, **la norme de l'accélération** du véhicule doit rester inférieur à $a_{\mathrm{max}} = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ à tout instant.

1. Montrer que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse V_0 sans risquer de quitter la route.
2. Montrer que si l'on entre dans la bretelle à la vitesse V_0 et qu'on freine dans le virage, alors cela augmente le risque de sortir de la route.
3. Calculer la vitesse maximale à laquelle la voiture peut décrire le virage sans risque de dérapage.

EXERCICE 10 : Bataille navale (⋆ ⋆ ⋆)

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$, le long d'une droite $(\mathscr{D})$. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\overrightarrow{NS}, \vec{v})$ a la valeur de α. T étant animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u}$.



1. Quelle doit être la valeur de l'angle de tir $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{SN})$ si l'on veut couler N ?
2. On veut que T atteigne N en un temps minimum. À quel instant, c'est-à-dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (On donnera la relation entre θ et α). Calculer l'angle de tir θ correspondante.

EXERCICE 11 : Rencontre de trois chiens (⋆ ⋆ ⋆)

À l'instant $t = 0$, trois chiens A, B et C initialement situés aux sommets d'un triangle équilatéral de côté d se mettent en mouvement l'un vers l'autre. A se dirige constamment vers B, B vers C et C vers A, avec une vitesse de même module v pour les trois chiens.

1. Montrer que le triangle ABC reste équilatéral de côté $\ell(t)$ (on pourra s'aider des symétries).
2. Montrer que $\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}_A.\vec{v}_B}{v} - v$.
3. En déduire la durée t_f de la poursuite.
4. Quelle est la distance D parcourue par chaque chien ?