TD10 – **Aspects énergétiques de la dynamique**

EXERCICE 1 : Hauteur maximale (⋆)

Un mobile M de masse m est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ depuis l'altitude $z_0 = h$. On note g la norme de l'accélération de la pesanteur.

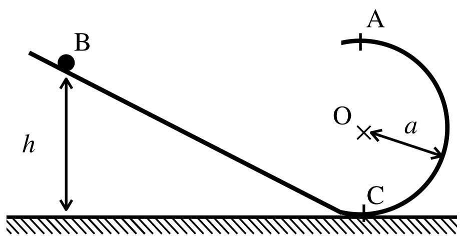
Déterminer la hauteur maximale H atteinte et sa vitesse V lorsqu'il touche le sol en $z = 0$.

EXERCICE 2 : Esquimau énergétique (⋆)

Reprendre l'exercice du cours sur l'esquimau glissant et déterminer l'équation différentielle d'ordre 1 en θ à partir d'une approche énergétique.

EXERCICE 3 : Looping (⋆)

On lâche une bille en B sans vitesse initiale en haut d'un looping composé d'une pente droite suivie d'un arc de cercle. On appelle C le point où l'arc de cercle touche le sol (C et A sont symétriques par rapport à O le centre du cercle). On néglige les frottements.



1. Trouver la vitesse de la bille au point A.
2. Déterminer l'expression de la réaction normale au support en un point quelconque de la partie circulaire paramétrée par $\theta = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$.
3. Déterminer à quelle condition portant sur h la bille pourra atteindre le point A

EXERCICE 4 : Saut à l'élastique (⋆⋆)

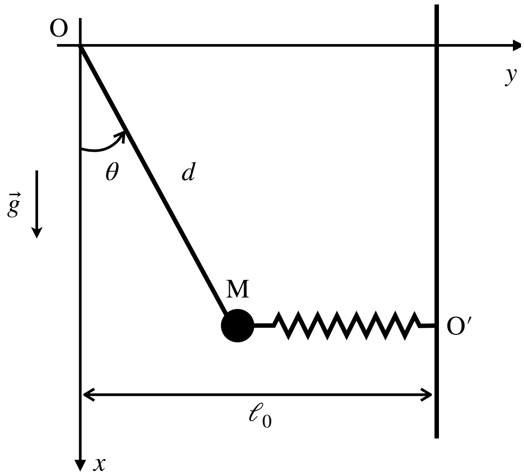
Un homme de masse $m = 70\,\text{kg}$ effectue un saut à l'élastique du haut du parapet d'un pont situé à une hauteur $z_0 = 60\,\text{m}$ au dessus du sol. L'élastique de masse négligeable se comporte comme un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 20\,\text{m}$ et de raideur k. Une de ses extrémités est accrochée au parapet du pont et l'autre à l'homme. On admettra que le mouvement s'effectue suivant la verticale et que la position de l'homme est repérée par sa distance z au sol. L'énergie potentielle de pesanteur sera prise nulle au niveau du sol et les frottements supposés négligeables.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de l'homme pour $0 < z < z_0$. Tracer le graphe représentatif

2. Au delà de quelle valeur de k le saut est-il possible sans danger en suppoosant une vitesse initiale nulle et $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$.

EXERCICE 5 : Pendule et ressort (⋆⋆)

On considère un pendule constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur d et d'un point matériel M de masse m. La liaison en O' est parfaitement coulissante de sorte que le ressort est constamment horizontal. Le ressort est idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On néglige tout frottement.



1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Les exprimer en fonction de θ et des vecteurs de la base polaire.
2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :
$$\ddot{\theta}+\sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta+\omega_2^2\right)=0$$
et préciser les expressions des constantes ω_1 et ω_2.
3. Montrer que le système est conservatif et mettre son énergie potentielle sous la forme :
$$E_p(\theta)=md^2\left(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta-\omega_2^2\cos\theta\right)$$
4. Montrer que le système possède toujours au moins deux positions d'équilibre. Montrer également qu'il en existe deux autres à une condition sur ω_1 et ω_2 que l'on précisera. Préciser alors dans quel intervalle se trouvent ces positions d'équilibre.
5. Montrer que la position d'équilibre $\theta=0$ est stable. Déterminer alors l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq}=0$ et en déduire la pulsation Ω des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.
6. Montrer que la position d'équilibre $\theta=\pi$ n'est pas toujours stable et préciser alors à quelle condition elle l'est. Commenter physiquement.
7. Dans le cas où elle est stable, déterminer l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq}=\pi$ et en déduire l'expression de la pulsation Ω' des petites oscillations autour de cette position d'équilibre :
$$\Omega'=\sqrt{-\omega_2^2+\omega_1^2}$$
8. Montrer enfin que les deux dernières positions d'équilibre déterminées en question **4.** ne sont jamais stables lorsqu'elles existent.

Données :

On rappelle l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 2 :
$$f(x)\simeq f(x_0)+(x-x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$

EXERCICE 6 : Détente d'un ressort (⋆⋆)

Un point matériel est lié à un ressort horizontal de raideur k. On comprime le ressort d'une longueur ℓ_1 en exerçant une force $\vec{F}=-F\vec{e}_x$ horizontale sur le point matériel, puis on change brusquement le sens de la force $\vec{F}$ appliquée (tout en gardant la même norme).

Exprimer l'allongement maximal obtenu ℓ_2 en fonction de ℓ_1.

EXERCICE 7 : Looping 2 (⋆)

L'objectif est de retrouver la vitesse minimale à fournir au wagon de masse m pour qu'il puisse franchir un looping de rayon R en supposant qu'il puisse rouler en absence de toute forme de frottement et qu'il soit attaché aux rails (le wagon ne pourra pas tomber). Obtenir l'expression de v_{min} en utilisant des théorèmes énergétiques.

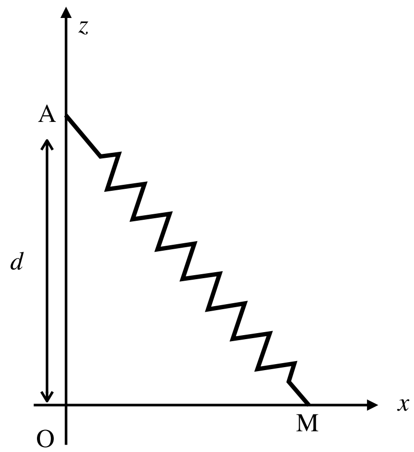
EXERCICE 8 : Distance de freinage (⋆)

Une voiture de masse $m = 1{,}5 \times 10^3$ kg roule à la vitesse $v_0 = 50\,\text{km/h}$ sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur écrase la pédale de frein et s'arrête sur une distance $d = 15\,\text{m}$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse. On suppose par ailleurs qu'il n'y a pas d'autres forces dissipatives que la force de frottement.

1. Calculer le travail de la force de freinage.
2. En déduire la norme de cette force.
3. Quelle distance faut-il, en supposant la force de freinage identique, pour s'arrêter si la vitesse initiale est de $v_0' = 70\,\text{km/h}$?
4. Commenter cette phrase relevée dans un livret d'apprentissage de la conduite : « La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile ».

EXERCICE 9 : Bifurcation (⋆⋆)

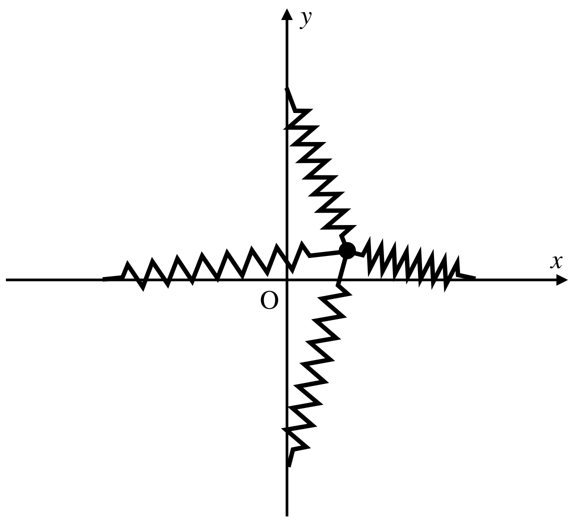
Un point matériel de masse m situé en M se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal (Ox). Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k à un point situé à la verticale de O tel OA = d. On note ℓ la longueur AM du ressort.



1. Tracer l'énergie potentielle du point matériel $E_p(x)$ dans les cas $d \geq \ell_0$ et $d \leq \ell_0$. En déduire les positions d'équilibres x_{eq} et leur stabilité.
2. Représenter x_{eq} en fonction de d. Analyser physiquement ce qu'il se passe lorsque l'on fait décroître d à partir d'une valeur supérieure à ℓ_0.

EXERCICE 10 : Oscillateur plan (⋆ ⋆ ⋆)

Quatre ressorts identiques ont leurs extrémités fixées aux sommets d'un carré, situés sur les axes d'un repère cartésien (Oxy) horizontal, à la distance a de l'origine O. Leur autre extrémité est fixée à une masse m située en M. Ces ressorts ont une raideur k et une longueur à vide négligeable par rapport à a.



1. Montrer que le point O est une position d'équilibre pour la masse m.
2. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse m lorsqu'elle est écartée de sa position d'équilibre. Montrer que si on la libère sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire dont on calculera la période.
3. Montrer que l'énergie potentielle de la masse m ne dépend que de la quantité $OM = r$ et qu'elle peut se mettre sous la forme $E_p(r) = \frac{1}{2}k'r^2$. Donner l'expression de k' et retrouver la valeur de la période du mouvement calculée à la question 2.