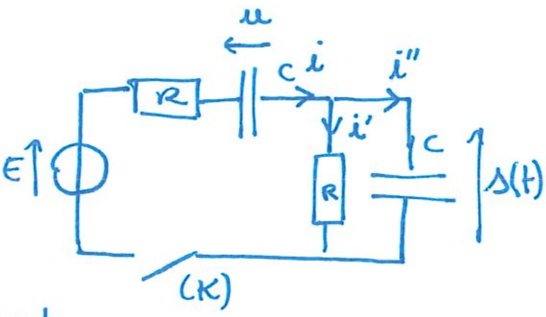
DM3 Correction

Exercice 1



1. Pour $t<0$, les condensateurs sont déchargés et le circuit est ouvert, tous les courants sont nuls. Donc la tension $s(t)$, qui est la tension aux bornes d'une résistance R, est également nulle.

Donc $s(t=0^-)=0$

Or par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$\underline{s(t=0^+)=s(t=0^-)=0}$$

2. $\begin{cases} \text{La loi des noeuds donne : } i = i' + i'' \\ \text{La loi des mailles donne : } E = Ri + u + s \end{cases}$

* Or $i'(t=0^+)=0$ car $s(t=0^+)=0$ et $s(t)=Ri'(t)$

donc $\underline{i(t=0^+)=i''(t=0^+)}$

* Pour $t<0$, les condensateurs sont déchargés.

D'où $u(t=0^-)=0$

et par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $\underline{u(t=0^+)=u(t=0^-)=0}$

* Ainsi $E = Ri(t=0^+)+u(t=0^+)+s(t=0^+)$

or $s(t=0^+)=0$

D'où $i(t=0^+)=\dfrac{E-u(t=0^+)}{R}=\underline{\dfrac{E}{R}}$

* Donc $i''(t=0^+) = \frac{E}{R}$

or $i''(t) = C\frac{ds}{dt}$ donc $\frac{ds}{dt}(t=0^+) = \frac{i''(t=0^+)}{C} = \frac{E}{RC} = \frac{E}{\tau}$

avec $\tau = RC$

3. Lorsque $t \to \infty$, on considère que le circuit atteint un régime permanent stationnaire. Les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, les courants sont nuls. Un même raisonnement qu'à la question 1 donne $s(t\to\infty) = 0$

4. Reprenons les lois des noeuds et des mailles écrites à la question 2.

$$E = Ri + u + s \quad \text{et} \quad i = i' + i''$$

or $i' = \frac{s}{R}$ et $i'' = C\frac{ds}{dt}$ donc $i = \frac{s}{R} + C\frac{ds}{dt}$

En dérivant la loi des mailles : $R\frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{ds}{dt} = 0$

or $i = C\frac{du}{dt}$ d'où $R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{ds}{dt} = 0$

En combinant les relations :

$$R\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R} + C\frac{ds}{dt}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{s}{R} + C\frac{ds}{dt}\right) + \frac{ds}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad RC\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}s = 0$$

Pour mettre sous forme canonique $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$

on pose $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{R^2C^2} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \end{cases}$

cela donne : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$

Le facteur de qualité est bien sans dimension, et ne dépend pas de R ou de C.

---

5. Comme $Q < \frac{1}{2}$, on a un régime apériodique.

Les racines du polynôme caractéristique sont réelles. $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}$$

La solution s'écrit : $s(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$

Déterminons A et B avec <u>les conditions initiales</u> :

$$\begin{cases} s(0^+) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ \frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} \Rightarrow r_+ A + r_- B = \frac{E}{RC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)} \\ B = \frac{E}{RC(r_- - r_+)} \end{cases}$$

D'où $s(t) = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)}\left(e^{r_+ t} - e^{r_- t}\right)$

6. Lorsque le maximum est atteint, la dérivée de la fonction s'annule.

Cherchons le temps où $\frac{ds}{dt} = 0$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)}\left(r_+ e^{r_+ t} - r_- e^{r_- t}\right)$$

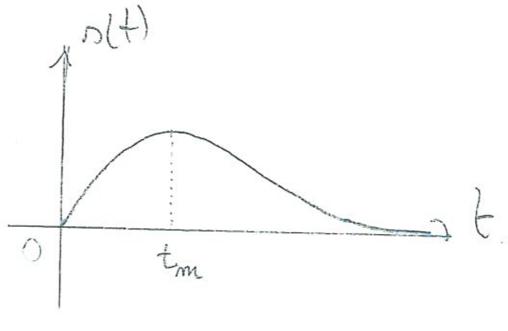
À $t = t_m$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \iff r_+ e^{r_+ t_m} - r_- e^{r_- t_m} = 0$$

$$\iff \frac{r_+}{r_-} = e^{r_- t_m - r_+ t_m}$$

$$\iff \ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right) = (r_- - r_+) t_m$$

$$\iff t_m = \frac{\ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right)}{r_- - r_+}$$



A priori, si la dérivée s'annule, la fonction atteint un extremum. Or d'après l'énoncé, on admet que s(t) admet un maximum, donc tm correspond à un instant où s(t) atteint un maximum.

Exercice 2

1. Pour $t=0^-$, l'interrupteur (K) est ouvert, donc $\underline{i=0}$

De plus la bobine n'est parcourue par aucun courant, donc $\underline{i_2=0}$

et le condensateur est déchargé, donc $\underline{u=0}$

et comme $u = r \times i_3 \Rightarrow \underline{i_3 = 0}$

Enfin, comme tous les autres courants sont nuls, $\underline{i_1 = 0}$

(ou sinon on peut dire que le condensateur se comporte comme un inter. ouvert).

2. Pour $t=0^+$, par continuité du courant parcourant la bobine : $\underline{i_2=0}$

et par continuité de la tension aux bornes de C : $\underline{u=0}$

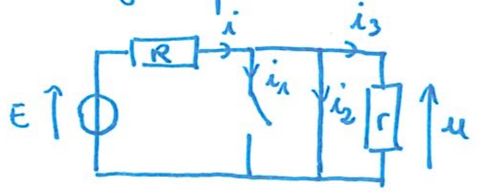
et comme $u = r \times i_3 \Rightarrow \underline{i_3=0}$

Ainsi la loi des noeuds donne $i = i_1$

et la loi des mailles donne $E = Ri + u = Ri$

D'où $\underline{i = i_1 = \frac{E}{R}}$

3. Pour $t \to \infty$, en supposant un régime permanent stationnaire atteint, le circuit équivalent est :



donc $\underline{u=0}$ (tension aux bornes d'un fil)

et $\underline{i_1=0}$

or $u = r \times i_3 \Rightarrow \underline{i_3=0}$

et $i = i_2$ par loi des noeuds

Or $E = Ri + u = Ri$, donc $\underline{i = i_2 = \frac{E}{R}}$