Correction TD5

Exercice 1

(1) (a) À $t=0^+$: - initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_C(t=0^-)=0$

Par continuité de la tension aux bornes de C : $u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = 0$

- à $t=0^+$, le circuit est fermé, le courant peut passer.

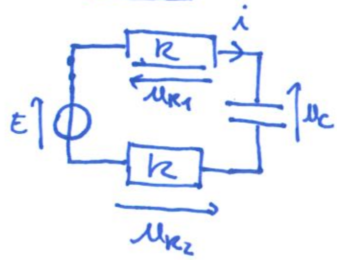
La loi des mailles donne : $E = u_{R_1} + u_C + u_{R_2}$

or $u_{R_1} = Ri$ et $u_{R_2} = Ri$

Donc $E = 2Ri + u_C$

et comme $u_C(t=0^+) = 0$: $i(t=0^+) = \dfrac{E}{2R}$

À $t>0$:



À $t\to\infty$: - lorsque le régime permanent est établi, comme un condensateur se comporte tel un interrupteur ouvert, le courant ne passe pas dans le circuit : $i(t\to\infty) = 0$

- la loi des mailles est toujours valable. $E = 2Ri + u_C$

or $i(t\to\infty) = 0$, donc $u_C(t\to\infty) = E$

(b) À partir de la loi des mailles : $E = 2Ri + u_C$

Comme $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, on obtient : $E = 2R \times C\dfrac{du_C}{dt} + u_C$

Finalement $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{2RC} = \dfrac{E}{2RC}$

en posant $\tau_1 = 2RC$, on trouve : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{\tau_1} = \dfrac{E}{\tau_1}$

La solution particulière s'écrit bien $u_C(t) = E$, qui correspond bien à $u_C(t\to\infty)$.

(la solution entière s'écrit : $u_C(t) = E(1-e^{-t/\tau})$)

(2) (a) – Si l'interrupteur est ouvert depuis un temps très long, on peut en conclure que le courant est initialement nul dans le circuit $i(t<0) = 0$

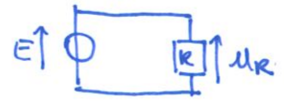
À $t = 0^+$, l'interrupteur est fermé, donc le courant peut passer.

Or par continuité du courant traversant une bobine : $i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0$

et comme $u_R = R \times i$, $u_R(t=0^+) = 0$

– lorsque le régime permanent est établi, on peut considérer que les bobines se comportent tels des fils en régime stationnaire.

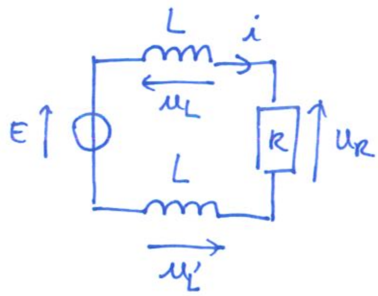
Système équivalent à $t \to \infty$



La loi des mailles donne : $E = u_R$

donc $u_R(t \to \infty) = E$

(b) Appliquons la loi des mailles pour $t > 0$:



$$E = u_L + u_R + u_L'$$

or $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ et $u_L' = L\dfrac{di}{dt}$

Donc $E = 2L\dfrac{di}{dt} + u_R$

or $u_R = Ri \Rightarrow i = \dfrac{u_R}{R}$

donc
$$E = 2L \times \frac{d}{dt}\left(\frac{u_R}{R}\right) + u_R$$
$$= \frac{2L}{R}\frac{du_R}{dt} + u_R$$

Finalement : $\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{R}{2L}u_R = \dfrac{R}{2L}E$

En posant $\tau_2 = \dfrac{2L}{R}$: $\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{u_R}{\tau_2} = \dfrac{E}{\tau_2}$

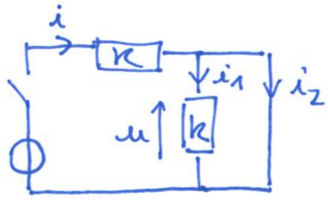
On trouve bien que la solution constante est $u_R = E$, qui correspond à la valeur prise par u_R en régime permanent.

Solution du circuit : $u_R(t) = -E e^{-t/\tau_2} + E = E\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)$

③ À $t=0^+$: si l'interrupteur est ouvert depuis longtemps, on peut considérer que toute l'énergie qui aurait pu être présente dans la bobine a été dissipée dans la résistance, donc $i_2(t=0^-)=0$ (et $u(t=0^-)=0$).

→ Sinon, on peut retrouver ce résultat avec une loi des mailles.

Pour $t<0$, on suppose que le système est en régime stationnaire/continu la bobine est donc équivalent à un fil, donnant le circuit équivalent suivant :



or $i=0$, car il y a un interrupteur ouvert dans cette branche.

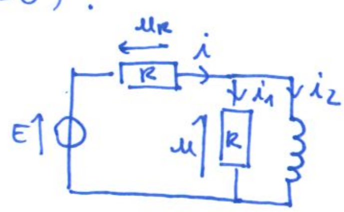
et $u=0$ car les bornes de la résistance sont reliées par un fil, ce qui implique que $i_1=0$ (d'après la loi d'Ohm).

Ainsi, avec la loi des noeuds : $i=i_1+i_2 \Rightarrow \underline{i_2=0}$ pour $t<0$.

→ par continuité du courant traversant une bobine : $\underline{i_2(t=0^+)=i_2(t=0^-)=0}$

→ pour déterminer $u(t=0^+)$, il faut appliquer la loi des mailles à $t=0^+$

⚠ $u(t=0^+)$ n'est pas forcément égal à $u(t=0^-)$!



la loi des mailles donne : $E=u_R+u$

or $u_R=Ri$ et $u=Ri_1$

Donc $E=Ri+Ri_1$

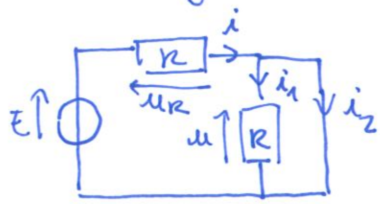
et la loi des noeuds donne $i=i_1+i_2$

or $i_2(t=0^+)=0 \Rightarrow i(t=0^+)=i_1(t=0^+)$

et $E=2R\times i(t=0^+) \Rightarrow i(t=0^+)=\dfrac{E}{2R}$ et alors $\underline{u(t=0^+)}=Ri(t=0^+)$
$= \underline{\dfrac{E}{2}}$

<u>Rq:</u> on aurait pu appliquer un pont diviseur de tension, car les deux résistances sont alors parcourues par le même courant (<u>uniquement à $t=0^+$</u> !)

→ <u>À $t \to \infty$</u> : en régime permanent, le circuit équivalent en régime continu est :



→ on voit que $\underline{u(t \to \infty) = 0}$ car la tension aux bornes de R est la même que celle aux bornes d'un fil.

→ si $u(t\to\infty) = 0$, alors $i_1(t \to \infty) = 0$ (d'après la loi d'Ohm).

et la loi des noeuds donne : $i(t \to \infty) = i_2(t\to\infty)$

or la loi des mailles donne $E = u_R + u \Rightarrow u_R(t\to\infty) = E$

$$\text{donc } \underline{i_2(t\to\infty)} = i(t\to\infty) = \frac{u_R(t\to\infty)}{R} = \underline{\frac{E}{R}}$$

Rq : on peut établir l'équation différentielle en écrivant loi des mailles et loi des noeuds.

$$E = Ri + u \quad \text{et} \quad i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R} + i_2$$

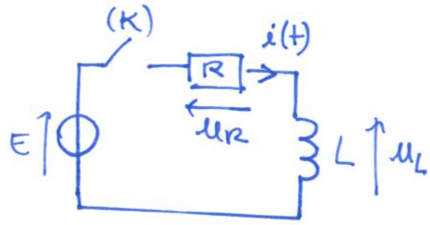
et sachant $u = L\dfrac{di_2}{dt}$, on trouve :
$$E = R\left(\frac{u}{R} + i_2\right) + u$$
$$= 2u + Ri_2$$
$$= 2L\frac{di_2}{dt} + Ri_2$$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{R}{2L} i_2 = \frac{E}{2L}$$

en posant $\underline{\tau_3 = \dfrac{2L}{R}}$: $\underline{\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{i_2}{\tau_3} = \dfrac{E/R}{\tau_3}}$ et alors $i_2(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_3}\right)$

Exercice 2

1. Il faut tout d'abord faire un schéma du circuit :



Pour déterminer $i(t)$ pour $t > 0$, il faut résoudre l'équation différentielle associée.

La loi des mailles pour $t > 0$ s'écrit : $E = u_R + u_L = R \times i(t) + L \times \dfrac{di}{dt}$

Ainsi : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L}$

en posant $\tau = \frac{L}{R}$ et $I_0 = \frac{E}{R}$, on trouve : $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{I_0}{\tau}$

La solution s'écrit : $i(t) = Ae^{-t/\tau} + I_0$

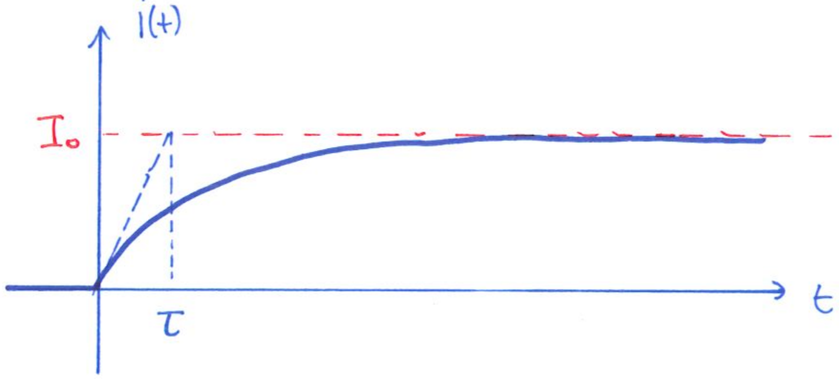
Afin de déterminer A, on utilise les conditions initiales :

→ à $t<0$: $i(t<0) = 0$ car le circuit est ouvert.

→ par continuité du courant traversant la bobine : $i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0$

Or $i(t=0^+) = Ae^{-0/\tau} + I_0 = A + I_0$

Ainsi $A + I_0 = 0 \Rightarrow A = -I_0$ et $i(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$

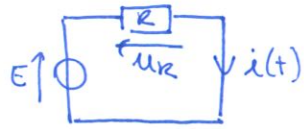


Pour $t \to \infty$, le circuit atteint un régime permanent et $i(t) \to I_0$

Si on étudie le circuit en régime continu :

on obtiendrait $E = u_R = R \times i$

$\Rightarrow i(t \to \infty) = \frac{E}{R} = I_0$

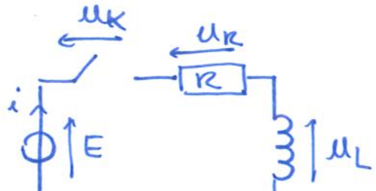


Rq : lorsque (K) est ouvert, la distance entre les conducteurs composant (K) augmente. Au départ quand la distance est encore faible, $E = \frac{u_K}{d}$ sera grand !

2. Si on ouvre soudainement (K), le modèle classique de l'interrupteur conduit à une discontinuité de i, ce qui est incompatible avec la présence de la bobine.

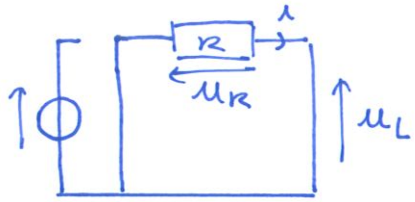
Comme i va varier soudainement, $\frac{di}{dt}$ va être très grand. En notant u_K la tension aux bornes de (K), on aura $u_K = E - Ri - L\frac{di}{dt}$

donc u_K deviendra très grand soudainement, et l'air devient alors conducteur ⇒ un courant passe, c'est l'étincelle de rupture



Exercice 3

1. Pour prévoir l'état du circuit en $t \to \infty$, il suffit d'étudier le circuit équivalent en régime continu.



* la bobine est équivalente à un fil
  donc $\underline{u_L(t \to \infty) = 0}$

* les bornes de la résistance sont reliées par un fil, donc $\underline{u_R(t \to \infty) = 0}$ (sinon on écrit une loi des mailles $u_R + u_L = 0$)

* Comme $u_R(t \to \infty) = 0$ et $u_R = Ri$, on a $\underline{i(t \to \infty) = 0}$

2. Pour $t > 0$, l'interrupteur est en position 2. La loi des mailles s'écrit :

$$u_R + u_L = 0$$

Or $u_R = Ri$ et $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

D'où $L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0}$ avec $\underline{\tau = \frac{L}{R}}$

3. On a trouvé $\tau = \frac{L}{R}$

Vérifions l'homogénéité : $\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[L]}{[R]}$ Rq : $\left[\frac{di}{dt}\right] = \frac{I}{T}$

or $[U] = [R]\,I$ d'après la loi d'Ohm

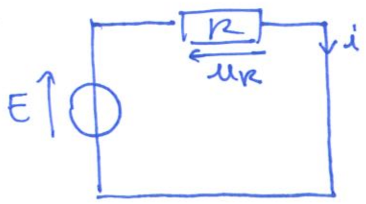
et $[U] = [L] \cdot \frac{I}{T}$ d'après la relation caractéristique pour une bobine.

donc $\underline{\frac{[L]}{[R]}} = \frac{\frac{[U] \cdot T}{I}}{[U]/I} = \underline{T}$ c'est bien homogène !

4. On souhaite déterminer $i(t = 0^+)$.

Or $i(t = 0^-)$ peut être déterminé par une étude du circuit

Pour $t < 0$, en supposant le régime permanent atteint, le circuit équivalent correspond à :



et alors par la loi des mailles :

$$E = u_R = R \times i$$

$$\Rightarrow i(t=0^-) = \frac{E}{R}$$

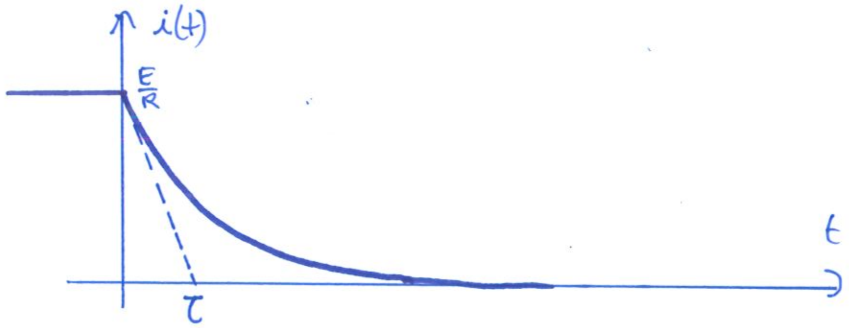
Par continuité du courant traversant la bobine, $i(t=0^+) = i(t=0^-) = \frac{E}{R}$.

5. La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$i(t) = A e^{-t/\tau}$$

En utilisant la condition initiale : $i(t=0^+) = A = \frac{E}{R}$

Finalement : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$



6. La puissance reçue par la bobine s'exprime : $P_{reçue,L} = u_L \times i$

Connaissant $i(t)$, il est possible de déterminer $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$

et $$W_L = \int_0^\infty P_{reçue,L}(t)\,dt = \int_0^\infty L\frac{di}{dt} \times i\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)dt$$

Finalement $W_L = E_L(t=\infty) - E_L(t=0)$

or $E_L(t=\infty) = 0$ car $i(t=\infty) = 0$

$E_L(t=0) = \frac{1}{2}L\frac{E^2}{R^2}$

D'où $W_L = -\frac{1}{2}\frac{LE^2}{R^2}$

L'énergie reçue est négative, cela revient à dire que la bobine a fourni de l'énergie au circuit. Elle s'est comportée comme un générateur.

* Or d'après la loi des mailles : $u_L + u_R = 0$

$$\Rightarrow u_L \times i + u_R \times i = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{reçue,L} + \mathcal{P}_{reçue,R} = 0$$

entre $t=0$ et $t \to \infty$, $\int_0^\infty \mathcal{P}_{reçue,L}\, dt + \int_0^\infty \mathcal{P}_{reçue,R} = 0$

$$\Rightarrow \underline{W_L + W_R = 0}$$

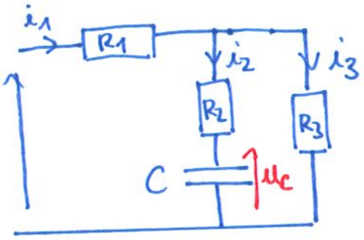
Et alors $W_R = -W_L$ l'énergie reçue par R est l'énergie fournie par L.

et donc $\underline{W_R = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R^2}}$

Toute l'énergie initialement stockée dans la bobine est <u>dissipée dans R par effet Joule</u>.

Exercice 4

Déterminons une équation portant sur $u_C(t)$ (et $q(t) = C \times u_C(t)$)



Comme il y a deux mailles, il faudra donc appliquer plusieurs loi des mailles (nous avons ici deux inconnues alors, i_2, relié à u_C, et i_3).

* loi des mailles - sur maille de droite : $u_C + R_2 i_2 = R_3 i_3$ (*)

  - sur maille externe : $e(t) + (-R_1 i_1) + (-R_3 i_3) = 0$ (**)

* loi des noeuds : $i_1 = i_2 + i_3$

Donc (**) devient : $e(t) = R_1 i_2 + R_1 i_3 + R_3 i_3$

$$= R_1 i_2 + (R_1 + R_3) i_3$$

$$= R_1 i_2 + (R_1 + R_3) \times \frac{u_C + R_2 i_2}{R_3}$$

$$= \frac{R_1 + R_3}{R_3} u_C + \frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_3} i_2$$

Or $i_2 = C \frac{du_C}{dt}$, donc $\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_3}{(R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3) C} u_C = \frac{R_3}{(R_3 R_1 + R_2 R_1 + R_2 R_3) C} e(t)$

en posant $\tau = \dfrac{R_1R_3 + R_1R_2 + R_3R_2}{R_1+R_3} C = (R_2 + R_{eq})C$ où $R_{eq} = \dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}$

on obtient $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{1}{\tau} \times \left(\dfrac{R_3}{R_1+R_3} e(t)\right)$

Pour $t>0$, elle s'écrit $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E_{eq}}{\tau}$ où $E_{eq} = \dfrac{R_3}{R_1+R_3} E$

car $e(t) = E$ pour $t>0$

$\Rightarrow u_c(t)$ de la forme : $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E_{eq}$

solution particulière constante

Pour déterminer A, on utilise les CI.

Conditions initiales : pour $t<0$, $e(t) = 0$

en régime stationnaire, C est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_2(t<0) = 0$

ainsi $i_1 = i_3$. Or comme $e(t<0) = 0$, $e(t<0) = (R_1+R_3)i_1(t<0) = 0$

$\Rightarrow i_1(t<0) = 0$

Ainsi $u_c(t<0) = R_3 i_3(t<0) = 0$

Par continuité de la tension u_c aux bornes de C : $u_c(t<0) = u_c(t=0^+)$

donc $u_c(t=0^+) = 0$

Or $u_c(t=0^+) = A + E_{eq} \Rightarrow A = -E_{eq}$

Finalement $u_c(t>0) = E_{eq}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

* $q(t) = C \times u_c(t) \Rightarrow q(t) = CE_{eq}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

* $i_2(t) = C\dfrac{du_c}{dt} \Rightarrow i_2(t) = \dfrac{CE_{eq}}{\tau} e^{-t/\tau}$

* D'après la loi des mailles : $R_3 i_3 = R_2 i_2 + u_c$

$\Rightarrow i_3(t) = \dfrac{R_2 C E_{eq}}{R_3 \tau} e^{-t/\tau} + \dfrac{E_{eq}}{R_3}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

* Enfin : $i_1 = i_2 + i_3$

$\Rightarrow i_1(t) = \left(1 + \dfrac{R_2}{R_3}\right)\dfrac{CE_{eq}}{\tau} e^{-t/\tau} + \dfrac{E_{eq}}{R_3}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

On trouve à $t \to \infty$

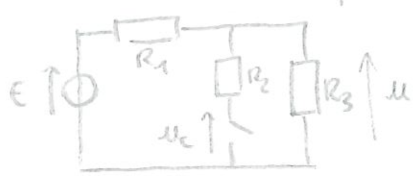
$u_c \to E_{eq} = \dfrac{R_3}{R_1+R_3} E$

$i_2 \to 0$

$i_3 \to \dfrac{E_{eq}}{R_3} = \dfrac{E}{R_1+R_3}$

$i_2 \to \dfrac{E_{eq}}{R_3} = \dfrac{E}{R_1+R_3}$

C'est cohérent ! Circuit équivalent :



$i_2 = i_3 = \dfrac{E}{R_1+R_3}$ et $u = u_c$

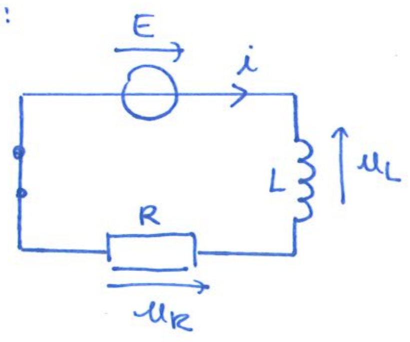
(car $i_2R_2 = 0$)

et $u = \dfrac{R_3}{R_1+R_3} E$

(pt diviseur de tension).

Exercice 5

circuit à $t>0$:



1. C'est pareil que l'exercice 2 !

D'après la loi des mailles :

$$E = u_L + u_R$$
$$= L\frac{di}{dt} + Ri$$

D'où $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E/R}{\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

On trouve une solution de la forme $i(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$

solution particulière constante.

Or à $t=0^-$, $i(t=0^-) = 0$ (car l'interrupteur est ouvert)

et par continuité du courant traversant une bobine : $i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0$

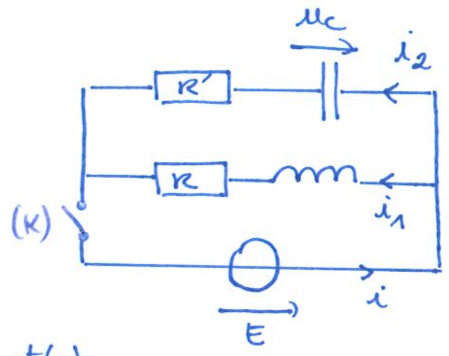
or $i(t=0) = A + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$

et $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

2. La solution s'écrit : $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$

régime permanent régime transitoire.

3. Faisons d'abord un schéma :



* Si on ferme (K), l'équation différentielle portant sur i_1 s'écrit toujours :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau} = \frac{E/R}{\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

et la solution serait toujours $i_1(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

(les conditions initiales n'ont pas changées)

* Pour déterminer $i_2(t)$, il faut déterminer $u_C(t)$ et alors $i_2(t) = C\frac{du_C}{dt}$

or par loi des mailles : $u_C + R'i_2 = E$ pour $t>0$

$$\Rightarrow u_C + R'C\frac{du_C}{dt} = E$$

soit $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{u_c}{\tau'} = \dfrac{E}{\tau'}$ avec $\tau' = R'C$

et comme $u_c(t=0^-) = 0$ (le condensateur s'est forcément déchargé dans les résistances)

(comme dans le cours !)

et par continuité de u_c, $u_c(t=0^+) = u_c(t=0^-) = 0$

on trouve finalement $u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau'}\right)$ et $i_2(t) = \dfrac{CE}{\tau'} e^{-t/\tau'}$

Les circuits RL et R'C répondent indépendamment à l'échelon de tension !

$$\text{Et } i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{CE}{\tau'} e^{-t/\tau'}$$

car $\tau' = R'C$

$$= \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{E}{R'} e^{-t/\tau'}$$

4. Pour que le régime transitoire ne soit pas vu par le générateur, il faut que les termes relevant du régime transitoire s'annulent :

$$\frac{E}{R'} e^{-t/\tau'} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = 0 \quad \forall t$$

Cela implique $R = R'$ et $\tau = \tau'$ $\Rightarrow \dfrac{L}{R} = R'C$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 1$$

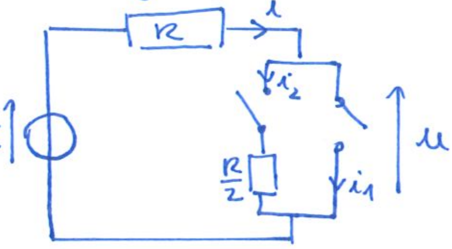
Exercice 6

1. Avant la fermeture, (K) était ouvert depuis longtemps, on peut supposer qu'un régime stationnaire était établi. Le circuit équivalent en régime stationnaire est :

De par la présence des interrupteurs ouvert :

$i_1 = 0$

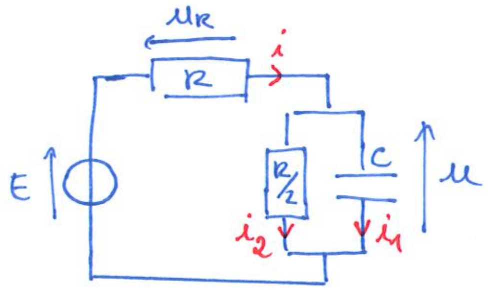
$i_2 = 0$



et d'après la loi des noeuds : $i = i_1 + i_2 = 0$

et d'après la loi des mailles : $E = Ri + u = u$ car $i = 0 \Rightarrow u = E$

2. Après la fermeture de (K), à $t=0^+$, seule la tension u est forcément continue.



Donc $u(t=0^+) = u(t=0^-) = E$

Or d'après la loi des mailles : $E = u_R + u$

si $u = E$, alors $u_R(t=0^+) = 0$

$\Rightarrow \quad i(t=0^+) = 0 \quad$ car $u_R = R \times i$

De plus, u est également la tension aux bornes de $\frac{R}{2}$

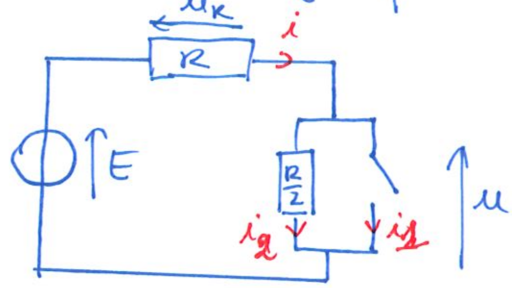
donc d'après la loi d'Ohm : $u = \frac{R}{2} \times i_2$

$\Rightarrow \quad i_2(t=0^+) = \frac{2E}{R}$

Enfin, d'après la loi des noeuds, $i = i_1 + i_2$

donc $i_1 = i - i_2 \quad \Rightarrow \quad i_1(t=0^+) = -\frac{2E}{R}$

3. Quand $t \to \infty$, on peut considérer que le système atteint un régime permanent stationnaire. Le circuit équivalent est :



* Comme la branche est ouverte, $i_1(t\to\infty) = 0$

D'après la loi des noeuds : $i_2(t\to\infty) = i(t\to\infty)$

* R et $\frac{R}{2}$ sont parcourus par le même courant, on peut donc appliquer un pont diviseur de tension :

$$u = \frac{R/2}{R + R/2} E$$

donc $u(t\to\infty) = \frac{E}{3}$

* D'après la loi des mailles : $E = u_R + u$

car $i_2(t\to\infty) = i(t\to\infty)$

$= R \times i + \frac{R}{2} \times i$

et alors $i(t\to\infty) = i_2(t\to\infty) = \frac{2E}{3R}$

4. D'après la loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Comme on veut exprimer i en fonction de u, exprimons i_1 et i_2 en fonction de u.

* d'après la loi d'Ohm : $u = \frac{R}{2} i_2$
* pour un condensateur : $i_1 = C\frac{du}{dt}$

Donc $i = i_1 + i_2 = C\frac{du}{dt} + \frac{2u}{R}$

5. En appliquant une loi des mailles, on trouve :

$$E = u_R + u$$
$$= R \times i + u$$
$$= RC\frac{du}{dt} + 2u + u$$

Finalement :

$$\frac{du}{dt} + \frac{3u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

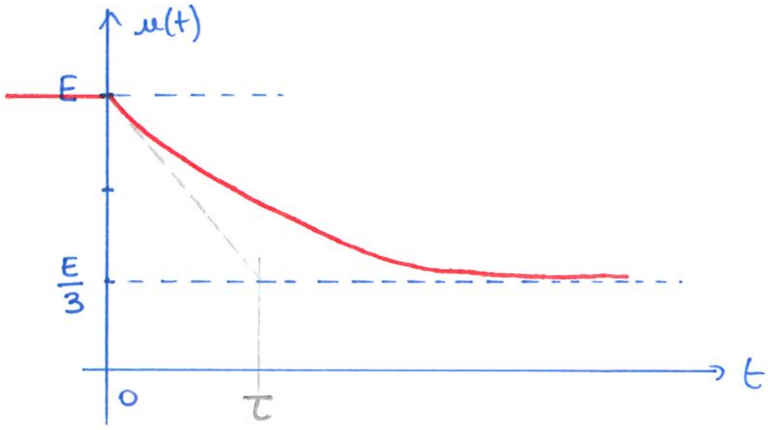
En posant $\tau = \frac{RC}{3}$: $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}$

6. La solution s'écrit de la forme : $u(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{3}$ solution particulière constante !

or $u(t=0^+) = E$ d'après les conditions initiales

et $u(t=0) = A + \frac{E}{3}$ donc $A + \frac{E}{3} = E \Rightarrow A = \frac{2E}{3}$

et $u(t) = \frac{E}{3}\left(2e^{-t/\tau} + 1\right)$

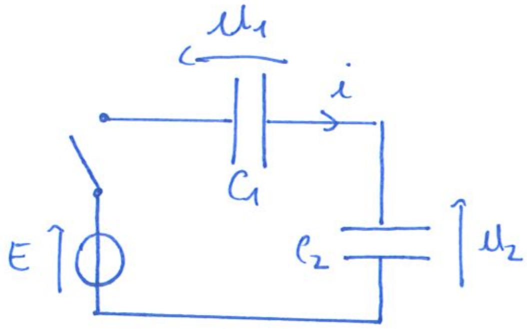


On a $u(t=0^+) = E$

et $u(t \to +\infty) = \frac{E}{3}$

C'est bien cohérent avec les valeurs déterminées.

Exercice 7



Notons pour $t<0$:

$$\begin{cases} u_1 = u_{01} = 10V \\ u_2 = u_{02} = -10V \end{cases}$$

À $t>0$, on peut écrire d'après la loi des mailles : $E = u_1 + u_2$

Afin de déterminer u_1 et u_2, il faut une seconde équation !

or $i = C_1 \dfrac{du_1}{dt} = C_2 \dfrac{du_2}{dt}$

donc $C_1 \dfrac{du_1}{dt} - C_2 \dfrac{du_2}{dt} = 0$

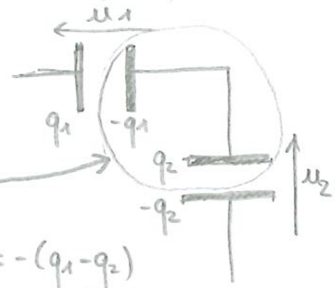
$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(C_1 u_1 - C_2 u_2\right) = 0$

Donc $\underline{C_1 u_1 - C_2 u_2 = \text{constante}}$!

→ cela revient à écrire $q_1 - q_2 = \text{cste}$!

C'est logique !

La charge totale dans le cercle reste constant vu que c'est isolé.



Elle est égale à $-q_1 + q_2 = -(q_1 - q_2) = \text{cste}$!

or à $t=0^+$, $C_1 u_1 - C_2 u_2 = C_1 u_{01} - C_2 u_{02}$

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \underline{u_1' + u_2' = E} & (1) \\ \underline{C_1 u_1' - C_2 u_2' = C_1 u_{01} - C_2 u_{02}} & (2) \end{cases}$$

$C_2 \times (1) + (2)$: $C_2 u_1' + C_1 u_1' = C_2 E + C_1 u_{01} - C_2 u_{02}$

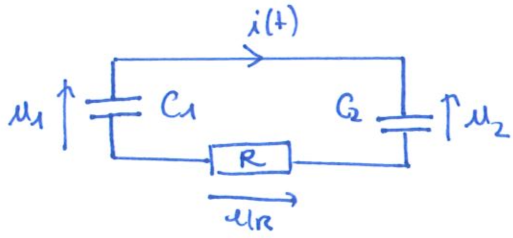
$$\Rightarrow \underline{u_1' = \frac{C_2}{C_1+C_2}(E - u_{02}) + \frac{C_1}{C_1+C_2} u_{01}}$$

$C_1 \times (1) - (2)$: $C_1 u_2' + C_2 u_2' = C_1 E - C_1 u_{01} + C_2 u_{02}$

$$\Rightarrow \underline{u_2' = \frac{C_1}{C_1+C_2}(E - u_{01}) + \frac{C_2}{C_1+C_2} u_{02}}$$

<u>AN</u> : $\begin{cases} u_1' = 16{,}7V \\ u_2' = -6{,}7V \end{cases}$

Exercice 8



1. À $t>0$, on a le circuit suivant.

Avec une loi des mailles, on trouve :

$$u_1 - u_2 - u_R = 0$$

Or u_1 est relié à i (en orientation générateur) : $i = -C_1 \frac{du_1}{dt}$

et $i = C_2 \frac{du_2}{dt}$

En dérivant la loi des mailles, on obtient : $\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} - \frac{du_R}{dt} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{i}{C_1} - \frac{i}{C_2} - R\frac{di}{dt} = 0$$

D'où : $\frac{di}{dt} + \frac{C_2+C_1}{C_1C_2R}\, i = 0$

On pose $\tau = R \times C_{eq}$ où $C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

Rq: pour deux condensateurs en série : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

et $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$

La solution s'écrit sous la forme : $i(t) = Ae^{-t/\tau}$

Conditions initiales : par continuité de u_1 et u_2 aux bornes des condensateurs :

$$u_1(0^+) = u_1(0^-) = \frac{q_0}{C_1} \quad \text{et} \quad u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0$$

Or d'après la loi des mailles : $u_R = u_1 - u_2$

donc $R \times i(t=0^+) = u_1(0^+) - u_2(0^+)$

D'où $i(t=0^+) = \frac{q_0}{RC_1}$ or $i(0) = A$

Finalement $i(t) = \frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}$

Calcul des charges.

* Comme $i(t) = \frac{dq_2}{dt}$, donc par intégration : $q_2(t) = \frac{q_0}{RC_1} \times \left(-\tau e^{-t/\tau}\right) + B$

Pour déterminer la constante d'intégration, on sait que $q_2(0) = 0$

Or $q_2(0) = \frac{q_0}{RC_1} \times \left(-\frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}\right) + B = -\frac{q_0C_2}{C_1+C_2} + B$

Finalement : $\underline{q_2(t) = q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

* Pour déterminer $q_1(t)$, on peut faire le même raisonnement.

Sinon on peut remarquer, tout comme dans l'exercice précédent, que

$$i(t) = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt} \Rightarrow \frac{d(q_1+q_2)}{dt} = 0$$

Donc $q_1(t) + q_2(t)$ est constant

or comme à $t=0$, $q_1(0) = q_0$ et $q_2(0) = 0$

$$\underline{q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) + q_2(0) = q_0}$$

Ainsi $q_1(t) = q_0 - q_2(t) = q_0 - q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} q_0 - q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-t/\tau}$

$$\underline{= q_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} - q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-t/\tau}}$$

Et donc, à $t \to \infty$:

$$\underline{q_1(t\to\infty) = q_0 \frac{C_1}{C_1+C_2}} \quad \text{et} \quad \underline{q_2(t\to\infty) = q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

- Ce résultat aurait pu être directement déterminé en régime permanent stationnaire :

  Comme les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouvert : $i = 0$

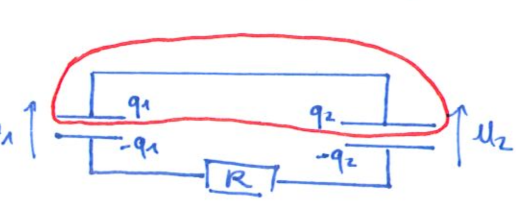
  et donc $u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{q_1(\infty)}{C_1} = \frac{q_2(\infty)}{C_2}$

  De plus, on a toujours $q_1(\infty) + q_2(\infty) = cste = q_0$

  On retrouve le résultat.

- On aurait également déterminer les équations différentielle portant sur q_1 et q_2.

Rq: De nouveau, on trouve que $q_1 + q_2 = cste$



Par conservation de la charge, tout ce qui est entouré par le cercle rouge est "isolé" (vu que les charges ne peuvent pas passer à l'armature opposée). C'est donc normal que $q_1 + q_2$ soit constante !

2. Avec la loi des mailles, on a :

$-u_2 \times i = -P_{reçue, C_2}$
$= P_{fournie, C_2}$

$$u_1 - u_2 = u_R$$

$$\Rightarrow u_1 \times i - u_2 i = u_R \times i$$

$$\Rightarrow P_{fournie, C_1} + P_{fournie, C_2} = P_{reçue, R}$$

⚠ u_1 et i en conv. générateur.

La puissance reçue par R correspond à la puissance fournie par les deux condensateurs.

or $P_{fournie, C_1} + P_{fournie, C_2} = u_1 \times i - u_2 \times i$ ⚠ conv. générateur.

$$= u_1 \left(-C_1 \frac{du_1}{dt}\right) - u_2 \left(C_2 \frac{du_2}{dt}\right)$$

$$= -C_1 u_1 \frac{du_1}{dt} - C_2 u_2 \frac{du_2}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C_1 u_1^2\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C_2 u_2^2\right)$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(E_1 + E_2\right)$$

où E_1 énergie stockée dans C_1
E_2 ———— C_2

Ainsi : $-\dfrac{d}{dt}(E_1 + E_2) = P_{reçue, R}$

La puissance reçue par R résulte de la décroissance/dissipation de l'énergie stockée dans les condensateurs.

3. $\Delta E_C = E_C(t \to \infty) - E_C(t = 0)$

or $E_C(t \to \infty) = E_1(t \to \infty) + E_2(t \to \infty)$

$$= \frac{1}{2} \frac{q_1^2(\infty)}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2(\infty)}{C_2}$$

$$= \frac{q_0^2}{2C_1} \cdot \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{q_0^2}{2C_2} \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

$$= \frac{q_0^2}{2(C_1 + C_2)}$$

et $E_c(t=0) = E_1(0) + E_2(0)$

$$= \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_1} + 0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_1}$$

Finalement : $\Delta E_c = \frac{q_0^2}{2(C_1+C_2)} - \frac{q_0^2}{2C_1} = -\frac{q_0^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)}$

On trouve $\Delta E_c < 0$, de l'énergie a été dissipée.

On peut calculer W_J :

$$W_J = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{reçue,R}\, dt = \int_0^{\infty} R i^2(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} R \frac{q_0^2}{R^2 C_1^2} e^{-2t/\tau}\, dt$$

$$= \frac{q_0^2}{RC_1^2} \times \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{q_0^2}{RC_1^2} \times \frac{RC_1C_2}{2(C_1+C_2)}$$

$$\Rightarrow \quad W_J = \frac{q_0^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)}$$

On trouve bien que : $-\Delta E_c = W_J$

ce écrit autrement : $E_c(0) = E_c(\infty) + W_J$

Ce qui était initialement stocké dans les condensateurs est partagé en une partie encore stockée dans le condensateur et une partie dissipée dans la résistance.

4. Si $R \to 0$, on a toujours $\Delta E_c < 0$

L'énergie et tout de même en partie dissipée (et ΔE_c ne dépend pas de R !)

On sort alors de l'ARQS et l'énergie est dissipée sous d'autres formes que par effet Joule.