TD6 – **Oscillateur harmonique**

EXERCICE 1 : Notions de bases du système masse-ressort (⋆)

Soit un système constitué d'une masse m posée sur une table horizontale et reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 à un axe fixe.

1. Déterminer la dimension de k ainsi qu'une unité associée.
2. Construisez, par analyse dimensionnelle, une grandeur homogène à un temps de la forme $\tau = m^\alpha k^\beta l_0^\gamma$.
3. Rappeler (sans le redémontrer) le résultat obtenu pour la période des oscillations d'un tel système. Commenter.

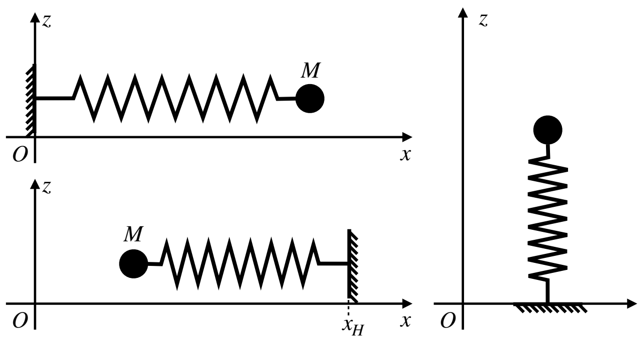
EXERCICE 2 : Résolution d'équations différentielles (⋆)

On cherche à résoudre les équations différentielles suivantes. Attention à reformuler les équation différentielles sous la forme canonique avant de les résoudre et à vérifier que les solutions sont bien homogènes.

Notation : Pour une fonction u dépendant du temps, on notera $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (dérivée première par rapport au temps) et $\ddot{u} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$ (dérivée seconde par rapport au temps).

1. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$
2. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$
3. $m\ddot{y} + k(y - l_0) = mg$ avec $y(0) = l_0$ et $\dot{y}(0) = 0$
4. $m\ddot{x} + kx = kl_0$ avec $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

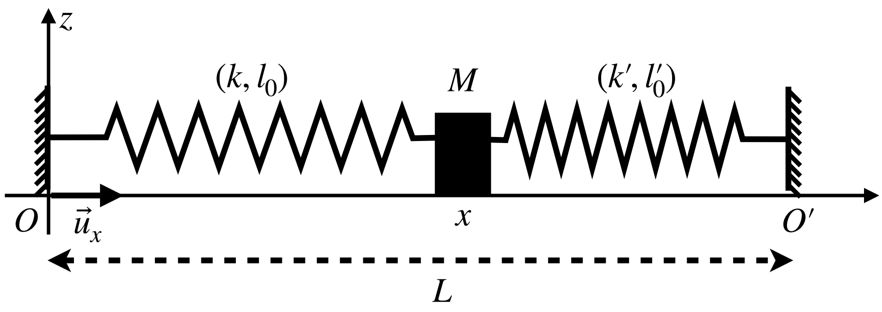
EXERCICE 3 : Position d'équilibre (⋆⋆)



1. Dans chacun des cas, donner l'expression de la force de rappel élastique puis établir l'équation du mouvement (sous la forme canonique) en négligeant les frottements et en notant m la masse du point M.
2. En déduire dans chacun des cas la position d'équilibre (notée x_{eq} ou z_{eq}) du système (c'est la position correspondant à la solution particulière constante).

EXERCICE 4 : Système avec deux ressorts (⋆ ⋆ ⋆)

Une masse m positionnée en M reliée à deux ressorts fixés en O et O' glisse sans frotter sur le sol. La position de la masse est repérée par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$. Les ressorts ont pour raideur respectives k et k' et comme longueurs à vide l_0 et l'_0. La longueur OO' est notée L.



1. Établir l'équation du mouvement de la masse après avoir effectué un bilan des forces qui s'appliquent sur la masse.
2. Montrer que la position d'équilibre est :

$$x_e = \frac{kl_0 + k'(L - l'_0)}{k + k'}$$

   Montrer ensuite que l'on retrouve un résultat attendu si les deux ressorts sont identiques.

3. Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations. Montrer que le système oscille à la même pulsation qu'un système à un seul ressort de raideur K dont on donnera l'expression en fonction de k et k'.
4. Résoudre l'équation du mouvement, sachant qu'à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. *On pourra utiliser la notation x_e définie plus haut.*