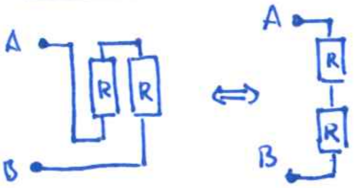
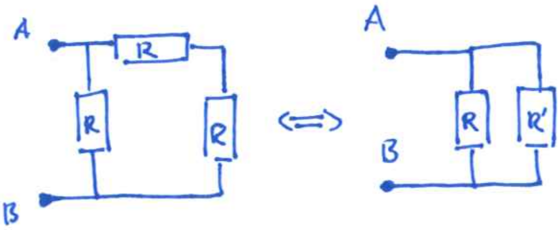
Correction TD n°4

Exercice 1



Les deux résistances sont en série.

$R_{eq} = R + R = \underline{2R}$

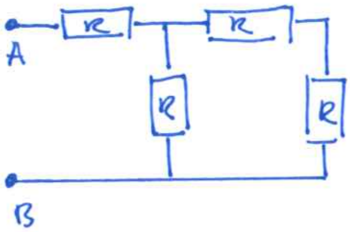


. Ici, on s'intéresse d'abord aux deux résistances en série. Elles sont équivalentes à $R' = R + R = 2R$

. Ensuite, on obtient R parallèle à R', donc

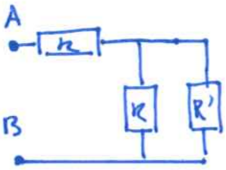
$$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

Donc $\underline{R_{éq} = \dfrac{2R}{3}}$



Ici aussi, il faut procéder par étapes.

① Le circuit est équivalent à :

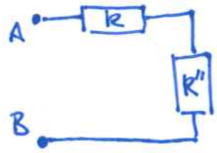


où R' est la résistance des deux résistances en série.

$R' = R + R = 2R$

② Ensuite, on voit que R et R' sont en parallèle, on pourra remplacer par R'' une résistance équivalente :

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

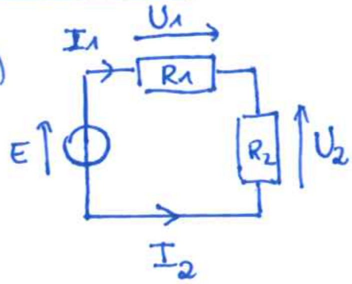


③ Enfin, on trouve deux résistances en série (R et R'').

donc la résistance équivalente est $R_{éq} = R + R'' = R + \frac{2R}{3} = \underline{\frac{5R}{3}}$

Exercice 2

(a)



On a une seule maille.
La loi des mailles s'écrit :

$$E + U_1 - U_2 = 0$$

Par un pont diviseur de tension : $U_2 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} E = \underline{5V}$

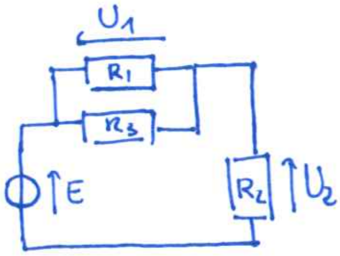
$$U_1 = \frac{-R_1}{R_1+R_2} E = \underline{-5V}$$

et avec la loi d'ohm :

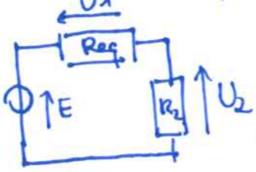
$U_1 = R_1 \times (-I_1) \Rightarrow I_1 = -\dfrac{U_1}{R_1} = \underline{5mA}$

$I_2 = -I_1 = \underline{-5mA}$

(b)



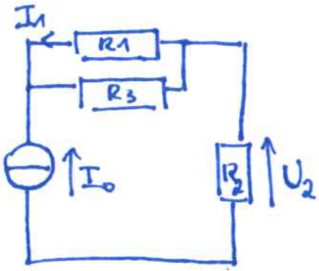
R_1 et R_3 sont en parallèle, ils sont équivalents à $R_{éq}$ avec $\dfrac{1}{R_{éq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} \Leftrightarrow R_{éq} = \dfrac{R_1 R_3}{R_1+R_3}$



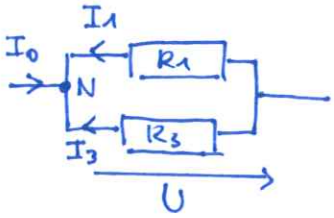
$R_{éq}$ et R_2 sont en série.
On a un pont diviseur de tension.

$U_1 = \dfrac{R_{éq}}{R_2 + R_{éq}} E \approx \underline{4{,}3V}$ $\quad U_2 = \dfrac{R_2}{R_2 + R_{éq}} \approx \underline{5{,}7V}$

(c)



Ici, on ne va pas foncer tête baissée dans le calcul d'une résistance équivalente pour $(R_1 // R_3)$, mais utiliser une loi des noeuds pour déterminer I_1.



* Comme R_1 et R_3 en parallèle, ils sont soumis à la même tension U.

$$U = R_1 I_1 = R_3 I_3$$

Or d'après la loi des noeuds : $I_0 + I_1 + I_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad I_3 = -I_0 - I_1$$

D'où $\quad R_1 I_1 = R_3(-I_0 - I_1) \Rightarrow \quad R_1 I_1 + R_3 I_1 = -R_3 I_0$

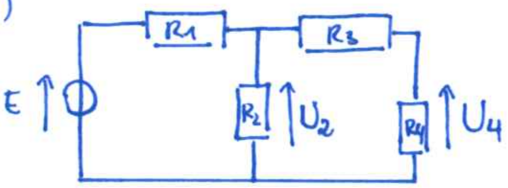
$$\Rightarrow \quad I_1 = -\frac{R_3 I_0}{R_1 + R_3} = \frac{3{,}0\times10^3 \times 10\times10^{-3}}{3{,}0\times10^3 + 1{,}0\times10^3}$$

$$= 7{,}5\,mA$$

Rq : c'est un pont diviseur de courant !

* Connaissant I_0 le courant traversant R_2, on déduit aisément U_2 avec la loi d'ohm (I_0 et U_2 sont en convention récepteur) : $\quad U_2 = R_2 I_0 = 1{,}0\times10^3 \times 10\times10^{-3} = 10V$

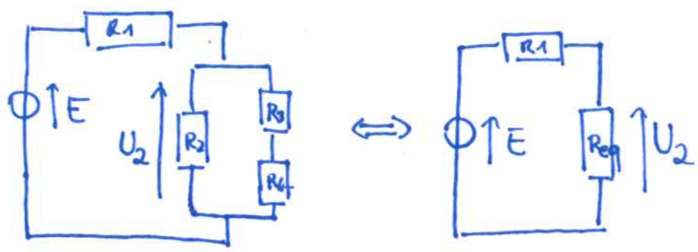
(d)



Ici, la seule grandeur connue est E. Nous allons donc d'abord exprimer la tension la plus "directement" reliée à E (c'est U_2 ici).

• Attention, on ne peut pas appliquer un pont diviseur de tension avec R_1 et R_2 afin de déterminer U_2, car R_1 et R_2 ne sont pas en série !

Par contre, en modifiant le schéma, on voit que R_1 est en série avec un ensemble de résistances que l'on peut remplacer par une résistance équivalente.



Calcul de Réq : $\quad R_{éq} = R_2 // (R_3 + R_4)$

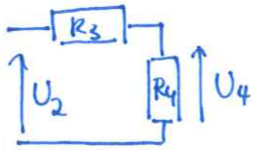
– la résistance de R_3 et R_4 en série donne $R_3 + R_4$

– Réq est donc : $\quad \frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_4} \quad \Rightarrow \quad R_{éq} = \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4} = 875\,\Omega$

Calcul de U_2 : on peut appliquer le pont diviseur de tension : $\quad U_2 = \frac{R_{éq}}{R_1 + R_{éq}} E$

donc $U_2 = \dfrac{875}{1{,}0 \times 10^3 + 875} \times 10 \simeq \underline{4{,}7\,V}$ $\quad \left(U_2 = \dfrac{R_2(R_3+R_4)(R_2+R_3+R_4)}{(R_2+R_3+R_4)\left(R_1(R_2+R_3+R_4) + R_2(R_3+R_4)\right)} E \right)$

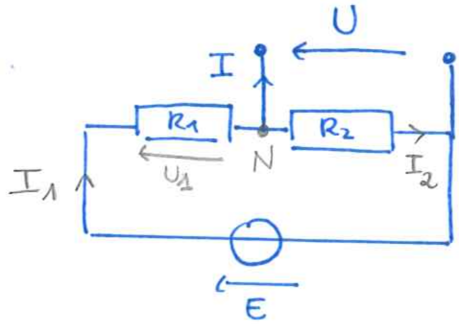
• Connaissant U_2, il est aisé de déterminer U_4. On peut appliquer un pont diviseur de tension, car R_3 et R_4 sont en série.



$$\underline{U_4 = \frac{R_4}{R_3+R_4} U_2} = \frac{4 \times 10^3}{3 \times 10^3 + 4 \times 10^3} \times 4{,}7 \simeq \underline{2{,}7\,V}$$

Exercice 3

Tout d'abord paramétrons le circuit :



* la loi des noeuds donne en N :

$$I_1 = I + I_2 \quad (**)$$

* la loi des mailles donne : $E = U_1 + U$ $(*)$

on vérifie toujours qu'on est bien en conv récepteur.

* loi loi d'Ohm donne : $U_1 = R_1 I_1$ et $U = R_2 I_2$

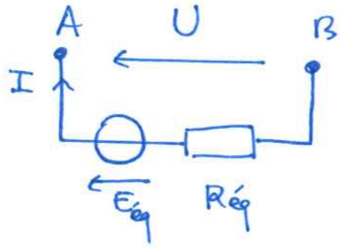
Donc $(*)$ s'écrit :
$$\begin{aligned} E &= R_1 I_1 + U \\ &= R_1 (I + I_2) + U \\ &= R_1 \left(I + \frac{U}{R_2} \right) + U \\ &= R_1 I + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) U \end{aligned}$$

on utilise $(**)$

Rq : l'objectif c'est de trouver une expression avec uniquement U et I !

Finalement $\underline{U = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} E - \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2} I}$

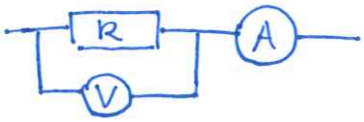
$$= E_{éq} - R_{éq} I$$



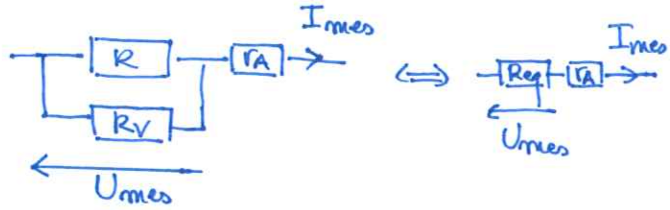
Ainsi le dipôle AB se comporte bien comme une source réelle linéaire dont le <u>modèle de Thévenin</u> a pour caractéristiques $\underline{E_{éq} = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} E}$ et une résistance interne $\underline{R_{éq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}$.

Exercice 4

1. On étudie un montage courte dérivation. Pour exprimer R_{mes}, il faut déterminer U_{mes} et I_{mes} avec :



- U_{mes} la tension aux bornes du voltmètre.
- I_{mes} le courant traversant l'ampèremètre.



et $R_{mes} = \dfrac{U_{mes}}{I_{mes}}$

Or ici R et R_V sont en parallèle. La tension U_{mes} est celle aux bornes d'une résistance équivalente R_{eq} avec : $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_V} \Longrightarrow R_{eq} = \dfrac{R R_V}{R+R_V}$

ainsi R_{mes} est directement R_{eq}, donc $R_{mes} = \dfrac{R \cdot R_V}{R+R_V}$

(car R_{eq} a une tension à ses bornes U_{mes} et est parcouru par I_{mes}, donc $U_{mes} = R_{eq} I_{mes}$)

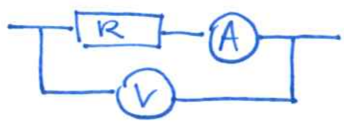
Connaissant R_V, on peut remonter à R sachant que $R_{mes}(R+R_V) = R \times R_V$

$$\Longrightarrow R = \frac{R_V R_{mes}}{R_V - R_{mes}}$$

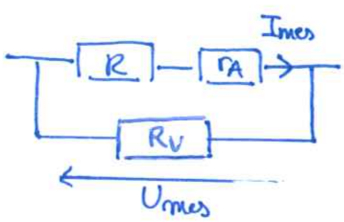
Pour que $R_{mes} \simeq R$, il faut $R_V \gg R$. (alors $R + R_V \approx R_V$ et $R_{mes} \approx \dfrac{R \times R_V}{R_V} = R$)

Rq : en choisissant $R_V \gg R$, on pourra négliger la fraction du courant qui passe dans le voltmètre, et le courant mesuré par l'ampèremètre sera effectivement le courant parcourant R.

2. On étudie le montage longue dérivation.



Ici, le problème est plutôt que le voltmètre ne mesure pas exactement la tension de R, mais aux bornes de R et r_A.



$U_{mes} = R I_{mes} + r_A I_{mes}$

$\Longrightarrow R_{mes} = \dfrac{U_{mes}}{I_{mes}} = R + r_A$

Connaissant r_A, on obtient donc R avec $R = R_{mes} - r_A$

Pour que $R_{mes} \approx R$, il faut $r_A << R$

3. Les valeurs de R_V et r_A étant fixées par chaque appareil, il faut donc choisir le montage adapté à la valeur de R à déterminer.

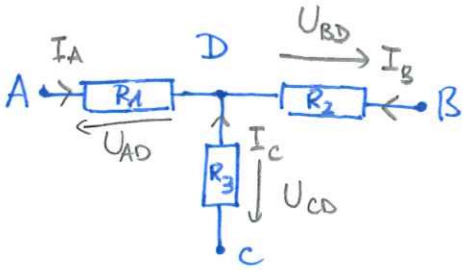
* si R est faible, on utilisera le montage courte dérivation.
  $R \ll R_V$ (on aura alors bien $R \ll R_V$)

* si R est élevé, on utilisera le montage longue dérivation.
  $R \gg r_A$ (on aura alors bien $R \gg r_A$)

Rq: $R_V \simeq 10 M\Omega$
$r_A \simeq 10\text{-}100\,\Omega$

Exercice 5

Commençons par paramétrer le problème.



La loi des noeuds donne :

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

or par la loi d'ohm : $U_{AD} = R_1 I_A$
$U_{BD} = R_2 I_B$
$U_{CD} = R_3 I_C$

D'où $$\frac{U_{AD}}{R_1} + \frac{U_{BD}}{R_2} + \frac{U_{CD}}{R_3} = 0 \implies \frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_B - V_D}{R_2} + \frac{V_C - V_D}{R_3} = 0$$

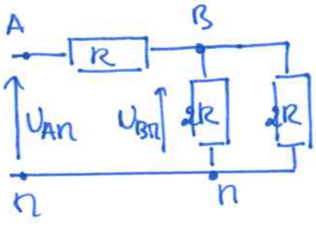
Finalement : $$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_D = \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_C}{R_3}$$

$$\implies V_D = \frac{V_A/R_1 + V_B/R_2 + V_C/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}$$

(cette formule est appelée le théorème de Millman)

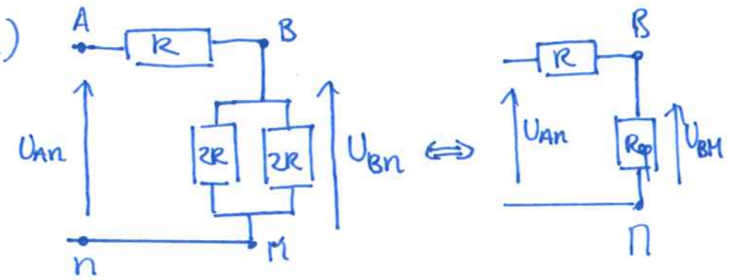
Exercice 6

Déterminons d'abord U_{BM} en fonction de U_{AM} :



⚠ On ne peut pas directement appliquer un pont diviseur de tension car R et 2R ne sont pas en série.

Par contre R est en série de (2R//2R)



L'association de 2R et 2R en parallèle est équivalente à Rép avec :

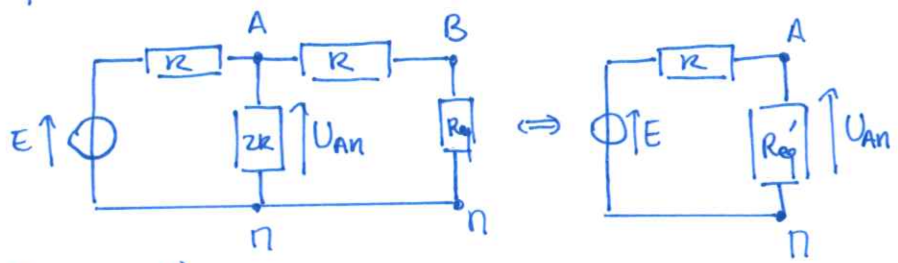
$$\frac{1}{R_{ép}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R} \Rightarrow R_{ep} = R$$

Finalement $U_{BN} = \dfrac{R_{eq}}{R + R_{ep}} U_{AN}$ (on peut appliquer le pont div. de tension)

$$= \frac{R}{R+R} U_{AN}$$

D'où $\underline{U_{BN} = \frac{1}{2} U_{AN}}$

Déterminons maintenant U_{AN} en fonction de E.



Comme tout précédemment, on ne peut pas directement applique le pont diviseur de tension car 2R n'est pas en série avec R !
(ils ne sont pas parcourus par le même courant)

Il faut donc déterminer le dipôle équivalent effectivement en série avec R.

- dans la branche ABN, les résistance R et Req sont en série (où Rep défini ci-dessus) donc la résistance équivalente a pour valeur $R + R_{ep}$.
- cette résistance équivalente $(R + R_{ep})$ est en parallèle de 2R, donc l'association est équivalente à $R'_{ép}$ avec :

$$\frac{1}{R'_{ép}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R+R_{ep}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$$

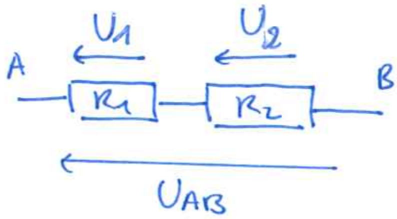
donc $R'_{ep} = R$

Finalement R est en série avec $R'_{ép}$. On peut reconnaître ici un pont diviseur de tension.

Donc $U_{AN} = \dfrac{R'_{eq}}{R'_{ep} + R} E = \dfrac{R}{R+R} E = \underline{\dfrac{E}{2}}$

et $U_{BN} = \dfrac{1}{2} U_{AN} = \underline{\dfrac{1}{4} E}$.

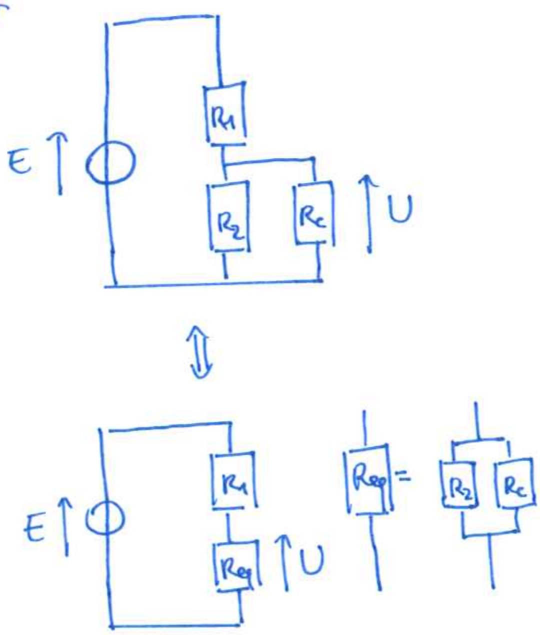
Exercice 7



1. Ici, on vous demande de reconnaître un pont diviseur de tension.

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{AB} \qquad U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{AB}$$

2. Ici, on souhaiterais appliquer un pont diviseur de tension. Pour cela, il faut faire "apparaître" deux résistances en série.



Ici R_1 est en série avec $(R_2 /\!/ R_c)$ où $(R_2 /\!/ R_c)$ est l'association en parallèle de R_2 et R_c.

La résistance R_{eq} équivalente à $(R_2 /\!/ R_c)$ est donnée par :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_c}$$

$$\Longrightarrow \quad R_{eq} = \frac{R_2 R_c}{R_2+R_c}$$

Finalement la formule du pont diviseur de tension donne : $U = \dfrac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} E$

soit $$\frac{U}{E} = \frac{R_2R_c/(R_2+R_c)}{R_1 + \frac{R_2R_c}{R_2+R_c}} = \frac{R_2 R_c}{R_1R_2 + R_1R_c + R_2R_c}$$

On souhait exprimer $\frac{U}{E}$ en fonction de $x = \frac{R_1}{R_1+R_2}$, $R = R_1+R_2$ et R_c

donc $\begin{cases} R_1 = xR \\ R_2 = (1-x)R \end{cases}$ et alors $$\frac{U}{E} = \frac{(1-x)RR_c}{x(1-x)R^2 + xRR_c + (1-x)RR_c}$$

$$= \frac{(1-x)R_c}{x(1-x)R + R_c}$$

à faire proprement sur sa copie si besoin ! Il suffit de partir des expressions de x et R et isoler R_1 ou R_2.

Comme $x < 1$ et $1-x < 1$, $x(1-x) < 1$

Donc si $R \ll R_c$, alors $x(1-x)R \ll R_c$

dans ce cas $$\frac{U}{E} = \frac{(1-x)R_c}{x(1-x)R + R_c} \approx \frac{(1-x)R_c}{R_c} = 1-x$$

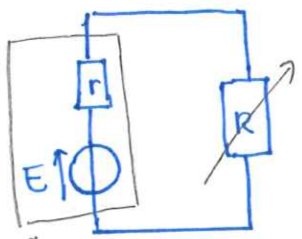
d'où $\frac{U}{E} \simeq \frac{R_2}{R_1+R_2}$ on retrouve la formule du pont diviseur de tension.

c'est normal ! Si $R_c \gg R$, on peut considérer R_c comme un interrupteur ouvert, il n'y a donc pas de courant dans la branche de R_c.

R_1 et R_2 sont donc parcourus par le même courant.

Exercice 8

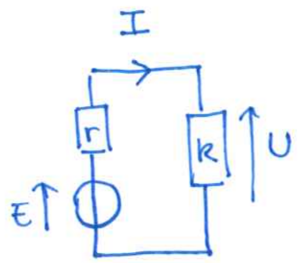
1.



souvent, on ajoute cette flèche pour signifier que R est variable.

générateur

2. Il faut d'abord paramétrer le problème.



- Déterminons U : on reconnaît un pont diviseur de tension (r et R sont en série).

donc $U = \frac{R}{r+R} E$

- Déterminons P puissance reçue par R.

→ on se rappelle que $P = U \times I = U \times \frac{U}{R}$ (car $U = RI$)

$= \frac{U^2}{R}$

donc $$P = \frac{R}{(r+R)^2} E^2$$

3. P est maximale pour une valeur de R

telle que $\frac{dP}{dR} = 0$ pour cette valeur particulière.

(dérivée nulle à un extremum).

or $\frac{dP}{dR} = \frac{(r+R)^2 - 2R(R+r)}{(r+R)^4} E^2$

$\frac{dP}{dR} = 0 \iff (r+R)^2 - 2R(R+r) = 0$

donc $r^2 + 2Rr + R^2 - 2R^2 - 2Rr = 0$

$\iff r^2 - R^2 = 0$

donc P est extremal si $R = -r$ (impossible car $R > 0$)

ou $\underline{R = r}$

C'est bien maximal car $P=0$ pour $R=0$, donc $P \nearrow$ pour $R < r$.

4. $\eta = \frac{P}{P_f}$ où P_f puissance fournie par la f.em. E.

Pour la fem E, E et I sont bien en convention générateur,

donc $P_f = E \times I$

$= E \times \frac{U}{R}$ car $I = \frac{U}{R}$ (voir question 2.)

$= E \times \frac{E}{r+R}$

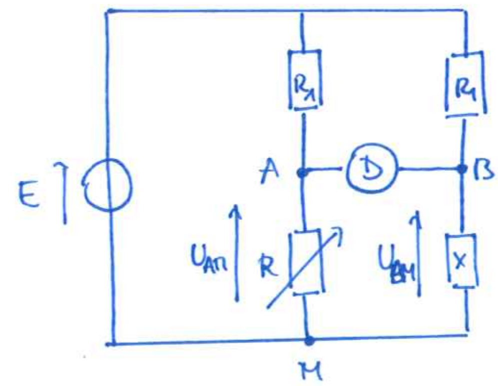
$= \frac{E^2}{r+R}$

et $\eta = \frac{P}{P_f} = \frac{R/(r+R)^2 \, E^2}{E^2/(r+R)} = \underline{\frac{R}{r+R}}$

5. Lorsque le montage est adapté, on a $R = r$ et donc $\underline{\eta = \frac{1}{2} = 50\%}$

Le rendement est de 50%.

Exercice 9



1. À l'équilibre, le courant dans D est nul. Or si D est assimilable à une résistance r, cela signifie que $U_{AB} = 0$

Donc A et B sont au même potentiel.

Ainsi $\underline{U_{AM} = U_{BM}}$

2. Comme il n'y a pas de courant dans D, R_1 et R sont parcourus par le même courant, on peut donc appliquer la relation du pont diviseur de tension

$$\underline{U_{AM} = \frac{R}{R+R_1} E}$$

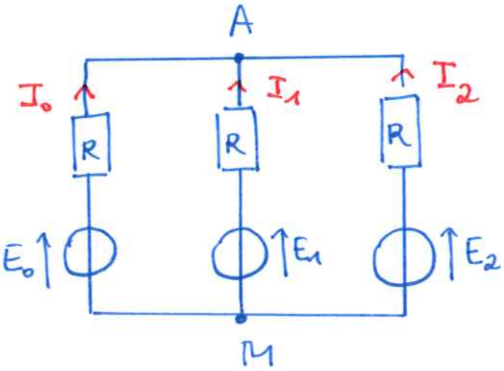
Le même raisonnement pour X et R_1, donc $U_{BM} = \underline{\frac{X}{X+R_1} E}$

3. À l'équilibre, $U_{AM} = U_{BM}$ et donc $\frac{R}{R+R_1} = \frac{X}{X+R_1}$

$$\Leftrightarrow \quad R(X+R_1) = X(R+R_1)$$
$$\Leftrightarrow \quad RX + RR_1 = XR + XR_1$$

On trouve $\underline{X = R}$

Exercice 10



Commençons par paramétrer le circuit.
Dans chaque branche le courant est orienté pour que les sources soient en convention générateur. La puissance fournie est donnée par $E_i \times I_i$. Comme $E_i > 0$, le signe de la puissance fournie est donné par le signe de I_i. Si $I_i > 0$, alors la source fonctionne en générateur.
Si $I_i < 0$, alors la source fonctionne en récepteur.

Après avoir paramétré, nous pouvons appliquer les lois de Kirchhoff.

- loi des mailles : $U = E_0 - RI_0$ (1)

$U = E_1 - RI_1$ (2) où $U = U_{AM}$

$U = E_2 - RI_2$ (3)

- loi des noeuds : $I_1 + I_2 + I_0 = 0$ (4)

Nous avons 4 inconnues (I_0, I_1, I_2, U) et 4 équations.

* (1)+(2)+(3) : $3U = E_0 + E_1 + E_2 - RI_0 - RI_1 - RI_2$

$$= E_0 + E_1 + E_2 - R\underbrace{(I_0 + I_1 + I_2)}_{=0 \text{ d'après } (4)}$$

donc $U = \dfrac{E_0 + E_1 + E_2}{3}$

* (1) donne : $I_0 = \dfrac{E_0 - U}{R} = \dfrac{1}{R}\left(E_0 - \dfrac{E_0 + E_1 + E_2}{3}\right)$

$$= -\frac{1}{3R}\left(E_1 + E_2 - 2E_0\right)$$

or $E_0 < E_1$ et $E_0 < E_2$ donc $E_1 + E_2 > 2E_0$

et alors $I_0 < 0$. Et $P_{fournie} = E_0 \times I_0 < 0 \Rightarrow$ E_0 est récepteur

* (3) donne $I_2 = \dfrac{E_2 - U}{R} = \dfrac{1}{R}\left(E_2 - \dfrac{E_0 + E_1 + E_2}{3}\right)$

$$= \frac{1}{3R}\left(2E_2 - E_0 - E_1\right)$$

comme $\begin{cases} E_2 > E_0 \\ E_2 > E_1 \end{cases}$ alors $2E_2 > E_0 + E_1$ et $I_2 > 0$

Donc $P_{fournie} = E_2 \times I_2 > 0 \Rightarrow$ E_2 est générateur

* (2) donne $I_1 = \dfrac{1}{3R}\left(2E_1 - E_0 - E_2\right)$

Le signe de I_1 dépend de la valeur de E_1.

→ si $E_1 > \dfrac{E_0 + E_2}{2}$, alors $I_1 > 0$ et $P_{fournie} = E_1 \times I_1 > 0$: E_1 générateur

→ si $E_1 < \dfrac{E_0 + E_2}{2}$, alors $I_1 < 0$ et $P_{fournie} = E_1 \times I_1 < 0$: E_1 récepteur.

Exercice 11

1. La caractéristique statique du dipôle ne passe pas par l'origine, c'est donc un dipôle actif.

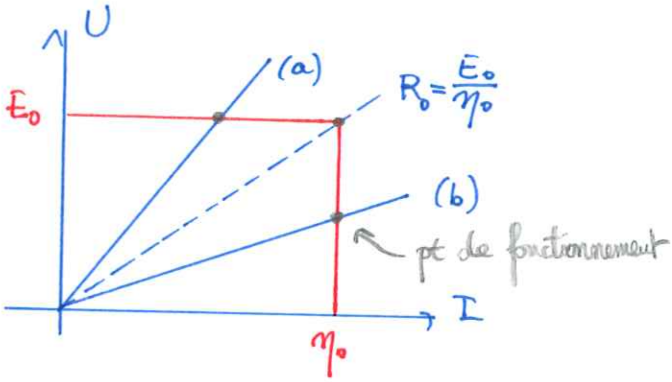
De plus, sa caractéristique statique n'est une fonction affine, c'est donc un dipôle non-linéaire.

2. La tension à vide est la tension pour $I = 0$: elle vaut $E_0 = 6{,}0\,V$

Le courant de court-circuit est le courant pour $U = 0$: il vaut $\eta_0 = 0{,}4\,A$.

3. Tant que $I < \eta_0$, $U = E_0$

et tant que $U < E_0$, $I = \eta_0$



4. Deux situations sont possibles :

* Dans le cas (a), où $R > R_0$, on aura un fonctionnement de l'alimentation stabilisée comme une source idéale de tension à E_0
* Dans le cas (b), où $R < R_0$, on aura un fonctionnement de l'alimentation stabilisée comme une source idéale de courant à η_0.

La limite est obtenue pour $R_0 = \frac{E_0}{\eta_0} = \frac{6.0}{0{,}4} = 15\,\Omega$

5. Pour $R = R_1 = 10\,\Omega$, on est dans le cas (b).

Donc les coordonnées du point de fonctionnement est $I_1 = \eta_0 = 0{,}4\,A$

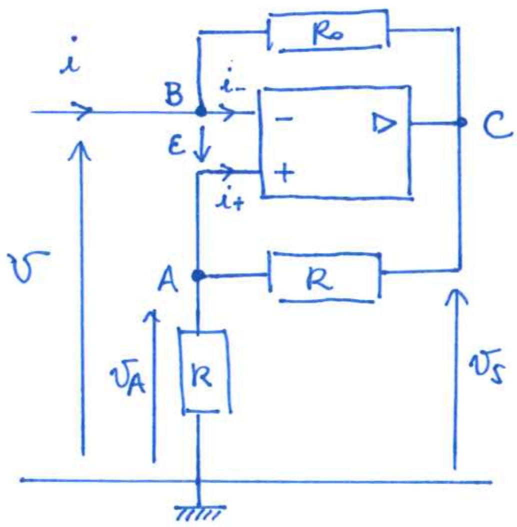
$U_1 = R_1 I_1 = 10 \times 0{,}4 = 4{,}0\,V$

Pour $R = R_2 = 20\,\Omega$, on est dans le cas (a).

Donc les coordonnées du point de fonctionnement est $U_2 = E_0 = 6{,}0\,V$

$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{6{,}0}{20} = 0{,}3\,A$

Exercice 12



1. D'après le modèle idéal de l'ALI, $i_+ = 0$.
Donc les deux résistances R sont parcourues par le même courant, on peut donc appliquer une relation de pont diviseur de tension :

$$v_A = \frac{R}{R+R} v_S = \frac{v_S}{2}$$

Or d'après le modèle linéaire de l'ALI : $\varepsilon = 0$
donc les points A et B sont au même potentiel
et alors $v = v_A$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{v_S}{2}$$

2. Intéressons nous à la branche BC.
Le courant parcourant R_0 vaut i car $i_- = 0$ (modèle idéal de l'ALI)
Donc $U_{BC} = R_0 \times i$

Or le potentiel au point B vaut v.
le potentiel au point C vaut v_S.

donc $U_{BC} = v - v_S = v - 2v = -v$

D'où $v = -R_0 \times i$

Le circuit étudié relie v et i par un coefficient de proportionalité négatif, comme une loi d'ohm avec une résistance négative.
Donc le dipôle est toujours générateur.