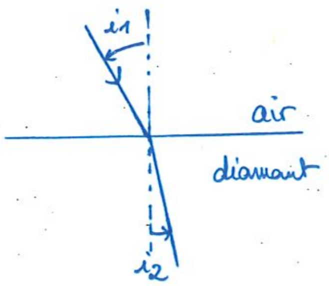
TD1 : Introduction à l'opt. géom.

Exercice 1 : Indice du diamant



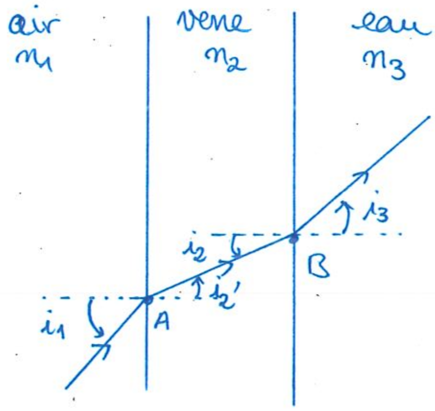
D'après la loi de Snell-Descartes :

$$n_{air} \times \sin(i_1) = n_{diamant} \times \sin(i_2)$$

Donc : $n_{diamant} = n_{air} \times \dfrac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)}$

A.N : $n_{diamant} = 1,0 \times \dfrac{\sin(30°)}{\sin(12°)} \simeq \underline{\underline{2,4}}$

Exercice 2 : Aquarium



1. • D'après la loi de Snell-Descartes en A

$n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2')$

Donc $i_2' = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin(i_1)\right)$

AN : $i_2' = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1,00}{1,50}\sin(46°)\right) \simeq \underline{\underline{29°}}$

• Comme i_2 et i_2' sont des angles alternes-internes

$$i_2' = i_2$$

• D'après la loi de Snell-Descartes en B :

$n_2 \times \sin(i_2) = n_3 \times \sin(i_3)$

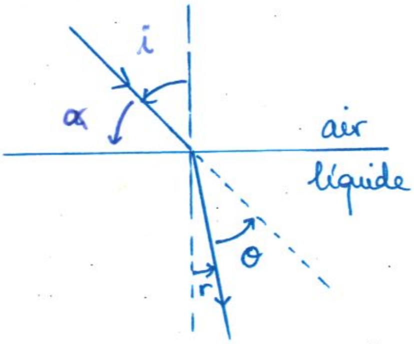
$\Rightarrow \quad i_3 = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n_2}{n_3}\sin(i_2)\right)$

AN : $i_3 = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1,50}{1,33}\sin(29)\right) \simeq \underline{\underline{33°}}$

2. Comme $n_1 < n_2$ (et à n_3), il n'existe pas de phénomène de réflexion totale pour un rayon entrant.

3. Comme $n_3 < n_2$, il n'y aura pas de réflexion totale pour un rayon de l'eau dans le verre. Par contre, il peut y avoir une réflexion totale entre le verre et l'air.

Exercice 3 : Mesure de l'indice optique d'un liquide



D'après la loi de Snell-Descartes :

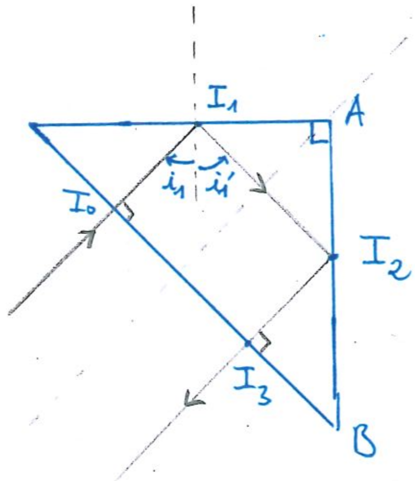
$$n_{air} \sin(i) = n \sin(r)$$

Or $r = i - \theta$ et $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Donc $n = n_{air} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta)}$ $\left(= n_{air} \dfrac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha + \theta)} \right)$

AN : $n = 1{,}00 \times \dfrac{\sin(90-56)}{\sin(90-56-13{,}5)} \simeq \underline{\underline{1{,}60}}$

Exercice 4 : Prisme de réflexion totale



1. On considère un rayon arrivant perpendiculairement à la face BC.

- Le rayon entre dans le prisme sans déviation car il arrive avec un angle nul avec la normale en I_0
- Lorsque le rayon arrive en I_1, il forme un angle $i_1 = 45°$ avec la normale (comme ABC est rectangle isocèle en A, $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45°$)

Or d'après la loi de Snell-Descartes, l'angle réfracté en I_1 serait déterminé par :

$$n \times \sin(i_1) = n_{air} \times \sin(r)$$

Cependant, comme $n \times \sin(i_1) = 1{,}5 \times \sin(45°) = 1{,}06 > 1$

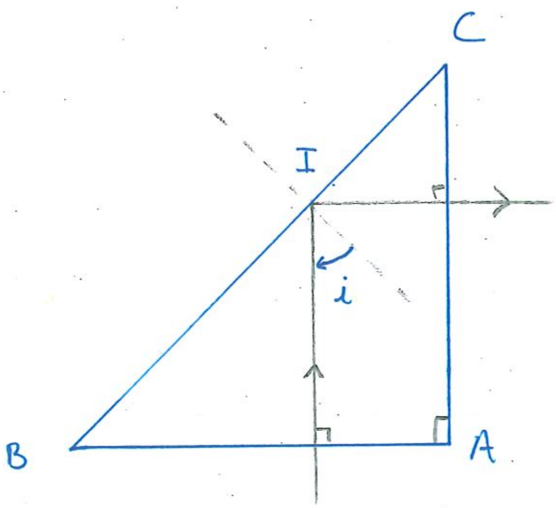
l'angle r n'est pas défini ! Il y a <u>réflexion totale</u>.

Le rayon repart en formant un angle $i_1' = i_1 = 45°$.

- Le même raisonnement s'applique en I_2. Il y a <u>réflexion totale</u>.
- En I_3, par construction géométrique, le rayon arrive perpendiculairement au côté BC. Il ressort donc <u>sans être dévié</u>.

<u>Finalement</u>, le rayon ressort du prisme dans la <u>même direction</u> que le rayon incident mais dans le <u>sens opposé</u>, du point symétrique au point d'incidence

par rapport à la médiatrice de [BC].

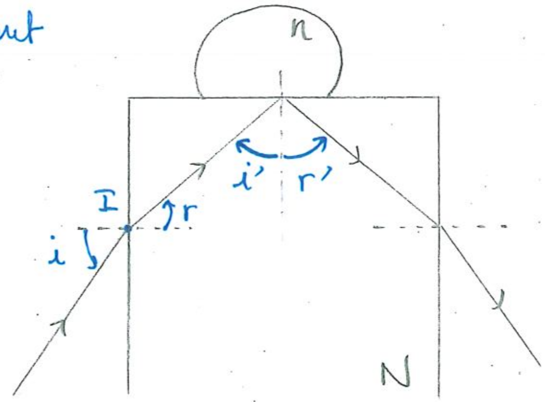


2. En utilisant un raisonnement similaire que pour la question précédente, on peut voir que le rayon n'est pas dévié lorsqu'il rentre sur la face BA du prisme.

Le rayon atteint la face BC en formant un angle de 45° avec la normale. Cela entraîne un phénomène de réflexion totale. Le rayon réfléchi repart en formant un angle de 45° avec la normale (donc un angle de 90° avec le rayon incident).

Le rayon ressort de la face AC perpendiculairement à cette face.

Exercice 5 : Réfractomètre à réflexion totale



1. Appelons i' l'angle que fait le rayon incident arrivant à l'interface en $N \rightarrow n$.

Dans le cas limite où i' est juste assez grand pour qu'il y ait réflexion totale :

$$i'_0 = \text{Arcsin}\left(\frac{n}{N}\right)$$

Or $r = \frac{\pi}{2} - i'$

Donc $\sin(r) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i'\right) = \cos(i')$

En utilisant la loi de Snell-Descartes en I :

$$n_{air} \sin(i) = N \sin(r)$$

(en prenant $n_{air} = 1{,}00$)

Donc : $n_{air} \sin(i_0) = N \cos(i'_0)$

soit on utilise la formule : $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$

soit on remarque que $\cos(i'_0) = \sqrt{1-\sin^2(i'_0)}$

Dans tous les cas : $\sin(i_0) = \sqrt{N^2 - n^2}$

(C'est le même raisonnement que pour la fibre optique à saut d'indice !)

2. En repérant l'angle i_0 pour lequel il y a réflexion totale (en balayant par exemple à partir de grands angles i et en détectant un signal lumineux en sortie du réfractomètre), il est possible de remonter à n connaissant N.

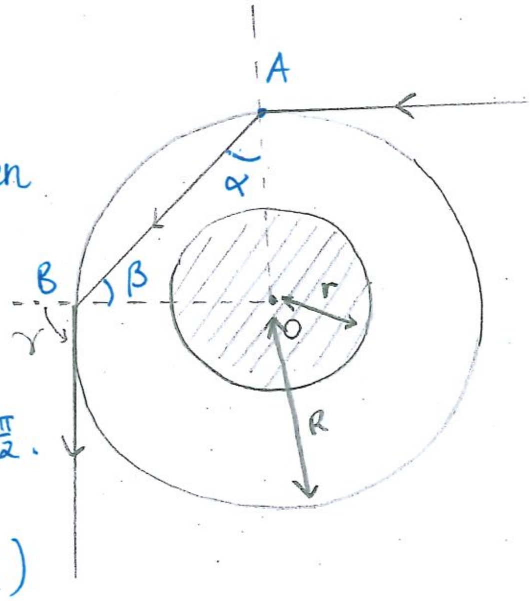
Ce fonctionnement repose sur le phénomène de réflexion totale. Il faut que $n < N$ pour que cela soit possible.

3. En réécrivant la solution de la question 1 : $n = \sqrt{N^2 - \sin^2(i_0)}$

4. AN : $n = \sqrt{1{,}626^2 - \sin^2(60)}$

$= 1{,}376$

Exercice 6 : Optique dans un thermomètre



1. En appliquant la loi de Snell-Descartes en A, il vient :

$n_{air} \times 1 = n \times \sin\alpha$

car le rayon est en incidence rasante, donc forme un angle de $\frac{\pi}{2}$.

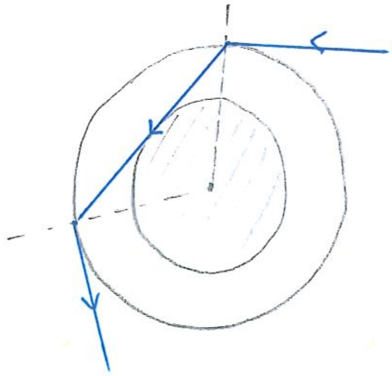
D'où $\alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$ (on prendra $n_{air} = 1$)

2. Par construction, les distances OA et OB sont égales à R. Donc OAB est isocèle en O. Ainsi $\alpha = \beta$.

Or si l'on applique la loi de Snell-Descartes en B, on trouvera la même relation qu'en A : le rayon ressort en émergence rasante.

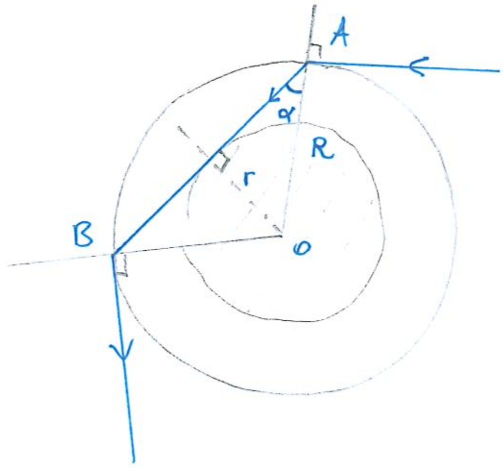
Détails : $n_{air} \sin(\gamma) = n \sin(\beta) = n \sin(\alpha) = n \times \frac{1}{n} \Rightarrow \sin\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

3. Cette situation apparaît lorsque tous les rayons passant dans l'enveloppe passent forcément par le mercure.



Le "dernier rayon" à être concerné (celui le plus éloigné du centre du cylindre), est celui issu de l'incidence rasante. Le cas limite est donc lorsque ce rayon est tangent avec le cylindre intérieur de la paroi, en contact avec le mercure.

4. Dans la situation limite, la hauteur du triangle OAB est égale à r.



Donc $\sin(\alpha) = \frac{r}{R}$

Or $\sin(\alpha) = \frac{1}{n}$ d'après la question 1,

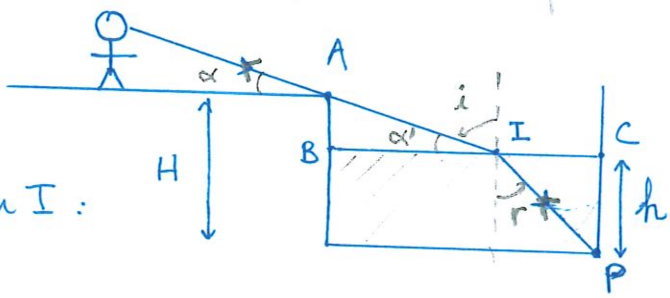
D'où $\boxed{\frac{r}{R} = \frac{1}{n}}$

AN: pour $n = 1{,}5$, $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

Exercice 7 : pièce dans une piscine

Par retour inverse de la lumière, on cherche le rayon qui passe par notre oeil et qui atteint la pièce.

Nous représentons le cas limite où il y a juste assez d'eau pour voir la pièce.



* Appliquons la loi de Snell-Descartes en I :

$\underbrace{n_{air}}_{1,0} \sin(i) = n \sin(r)$ (*)

* Dans le triangle ABI : $\frac{AB}{BI} = \tan(\alpha') = \tan(\alpha) = \frac{Y}{X}$ (**)

car α et α' sont des angles correspondants $\alpha = \alpha'$

et $i = \frac{\pi}{2} - \alpha'$.

On peut en déduire : $i = 63{,}43°$ et $r = 42{,}26°$
(de (*) et (**))

* Dans le triangle ICP : $\tan(r) = \frac{IC}{h}$

$$\Rightarrow IC = \tan(r) \cdot h$$

Or $d = BI + IC$) car $(**) \Rightarrow \frac{AB}{BI} = \frac{Y}{X}$

$= \frac{AB \times X}{Y} + IC$) $AB = H - h$

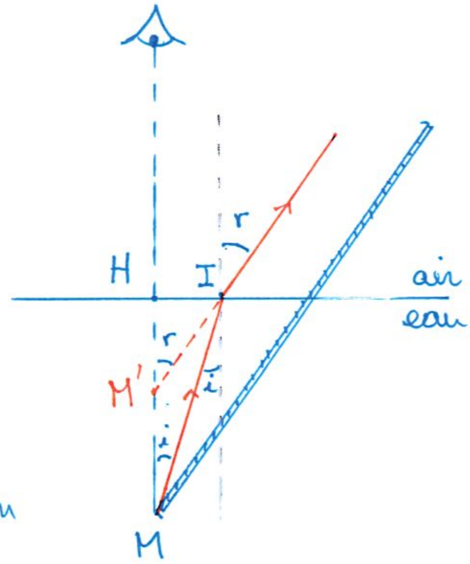
$= \frac{(H-h) \times X}{Y} + \tan(r) h$

En réécrivant cette équation : $h = \frac{d - H \cdot \frac{X}{Y}}{\tan(r) - \frac{X}{Y}}$

AN: $h = 92 \text{ cm}$

(On trouve bien $h < H$, c'est cohérent).

Exercice 8 : Expérience du bâton brisé



1. Il faut décortiquer la situation.

Lorsque les rayons issus de M passent de l'eau à l'air, leur direction change. L'œil interprète les rayons comme rectiligne, c'est pour cela qu'il a l'impression que tous ces rayons partant de M sont issus d'un point M', qui se trouve à la prolongation des rayons dans l'air.

Il s'agit de faire de la géométrie

* D'après Snell-Descartes : $n_{eau} \sin i = \underbrace{n_{air}}_{=1} \sin r$

or on considère des angles faibles : $n_{eau} \cdot i = r$

* $\widehat{HM'I} = r$ car ce sont des angles correspondants. Donc $\tan(r) = \frac{\overline{HI}}{\overline{HM'}}$

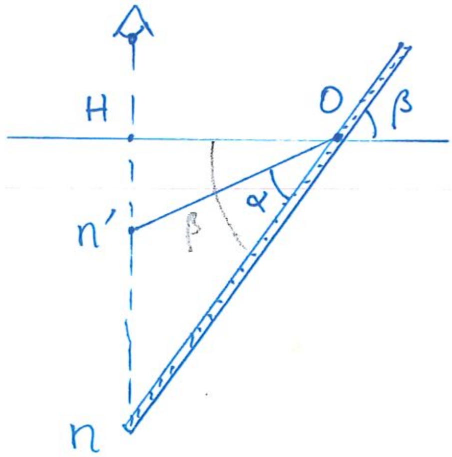
$$\Rightarrow r = \frac{\overline{HI}}{\overline{HM'}}$$

* $\widehat{HMI} = i$ car ce sont des angles alternes-internes.

Donc $\tan(i) = \frac{\overline{HI}}{\overline{HM}} \Rightarrow i = \frac{\overline{HI}}{\overline{HM}}$

Finalement : $\boxed{\overline{HM'} = \frac{\overline{HM}}{n}}$

2. Faisons de nouveau de la géométrie :



* $\widehat{HOM} = \beta$

Donc $\tan\beta = \dfrac{\overline{HM}}{\overline{HO}}$

* Dans le triangle HOn' :

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\overline{Hn'}}{\overline{HO}}$$

Or $\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

* Comme $\overline{Hn'} = \dfrac{\overline{Hn}}{n}$

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\beta}{n}$$

$$\Rightarrow \tan\beta - \frac{\tan\beta}{n} = \tan\alpha + \tan\alpha \cdot \frac{\tan^2\beta}{n}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\tan\beta}{1+\frac{1}{n}\tan^2\beta}$$

3. On cherche pour quelle valeur de $\tan\beta$ on aura un max de $\tan\alpha$.

Étudions la fonction : $f(x) = \dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x}{1+\frac{1}{n}x^2}$

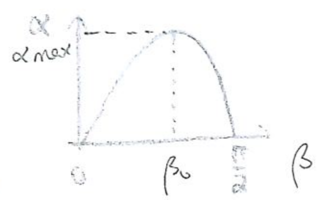
La fonction est maximale lorsque $\dfrac{df}{dx} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}x^2\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)x\cdot\frac{2x}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}x^2\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{x^2}{n}\right) = 0$$

Donc, comme $n \neq 1$, $x^2 = n$ au maximum

→ Pour être rigoureux :
pour $\tan\beta = \sqrt{n}$, $\tan\alpha$ atteint un extremum (dérivée nulle).
mais est-ce un maximum ?
$\tan\alpha \geqslant 0$, et $\tan\alpha = 0$ pour $\beta = 0$ ou $\beta = \frac{\pi}{2}$
↳ c'est bien un maximum



Donc $\tan\alpha$ est maximal pour $\tan\beta = \sqrt{n}$

$$\alpha_{max} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{n}}{2}\right)$$

on trouve $\beta = 49°6'$

$\alpha_{max} = 8°12'$