

TD0 – Analyse dimensionnelle

EXERCICE 1 : Analyse dimensionnelle pour un pendule (★)

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur l et de masse négligeable auquel est attachée une masse m . Le fil est fixé au support (immobile). Les frottements sont négligés et on se propose d'obtenir une expression pour la période Δt des oscillations du pendule.

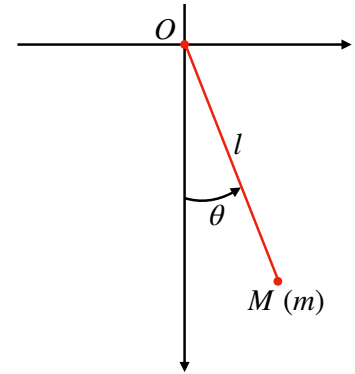
Il faut d'abord identifier les paramètres physiques pertinents comme la longueur du fil l , la masse m ainsi que le champ de pesanteur g et on suppose qu'il existe un modèle de la forme

$$\Delta t = k \times l^\alpha m^\beta g^\gamma$$

avec k , une constante sans dimension et α , β et γ , trois coefficients à déterminer. On en déduit pour les dimensions

$$[\Delta t] = T = [l]^\alpha [m]^\beta [g]^\gamma$$

Déterminer la valeur des trois coefficients et ainsi trouver la dépendance de la période d'un pendule simple.



EXERCICE 2 : Vérification d'homogénéité (★)

Vérifier si les expressions suivantes sont homogènes ou non.

1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ où T est la période des petites oscillations d'un pendule de longueur ℓ et g l'accélération de la pesanteur.
2. $\lambda = \frac{c}{\nu}$ où λ est la longueur d'onde, pour une fréquence ν et une vitesse c .
3. $\tau = RC$ où τ est la constante de temps d'un circuit composé d'une résistance R et d'une capacité C (on donne : $q = C \times U$ et $\Delta q = I \times \Delta t$ avec I l'intensité du courant et Δt une durée).
4. Les grandeurs U et E_i sont des tensions électriques, la grandeur I est un courant et que les grandeurs R_i sont des résistances :

$$\text{a) } U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{b) } U = \frac{R_1 E_1 + R_1 (R_1 + R_2) E_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{c) } U = \frac{R_1 R_2 I}{R_1 + R_2}, \quad \text{d) } U = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

Indice. On pourra utiliser la loi d'Ohm $U = RI$.

5. Un solide de masse m assimilable à un point matériel glisse sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné. Il est abandonné sans vitesse initiale à la hauteur h . On rappelle que g est l'accélération de la pesanteur (en ms^{-2}) :

$$\text{a) } v = \sqrt{\frac{2g}{h}}, \quad \text{b) } v = \sqrt{2gh}, \quad \text{c) } v = \sqrt{2mgh}.$$

6. On considère un gaz parfait dont l'équation d'état (reliant sa pression p , son volume V , sa température T et sa quantité de matière n) est $pV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits. Avec k une constante sans dimension, M la masse molaire du gaz et ρ sa masse volumique. La grandeur c est la vitesse de propagation du son dans ce gaz :

$$\text{a) } c = \frac{kRT}{M}, \quad \text{b) } c = k\sqrt{\frac{RT}{M}}, \quad \text{c) } c = k\sqrt{\frac{RT}{\rho}}.$$

Indice. On rappelle qu'une pression est homogène à une force divisée par une surface.

EXERCICE 3 : Dimension et unités en mécanique des fluides (★★)

1. Si l'on considère un fluide, compris entre deux plans parallèles séparés par une distance e , dont la vitesse relative v est petite, constante et parallèle aux plans, il faut exercer, pour vaincre la résistance visqueuse pour une surface S de fluide, une force F telle que :

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v}{e},$$

où η est la coefficient de viscosité dynamique.

Exprimer la dimension de η à l'aide des dimensions de base du système international. Quelle est l'unité SI de η ?

2. Lors d'un écoulement laminaire de fluide visqueux de coefficient de viscosité dynamique η dans un tuyau de rayon r et de longueur L sous l'action d'une pression P , le débit d'écoulement q s'écrit :

$$q = \frac{\pi Pr^4}{8\eta L}.$$

S'agit-il d'un débit en volume ou d'un débit en masse ?

3. En mécanique des fluides, la nature d'un écoulement peut être prédit à l'aide du nombre de Reynolds, un nombre sans dimension noté Re qui s'exprime en fonction de d la longueur caractéristique de l'écoulement, de la masse volumique ρ du fluide, de son coefficient de viscosité dynamique η , et de la vitesse de l'écoulement v .
Déterminer l'expression du nombre de Reynolds Re , sachant que Re est proportionnel à la vitesse v .

EXERCICE 4 : Vitesse d'un satellite (★★)

La vitesse d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre est :

$$V(z) = \frac{R^\alpha g^\beta}{\sqrt{R+z}}$$

avec $R = 6380 \text{ km}$; $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ et z , l'altitude au dessus du niveau de la mer.

1. Trouvez les coefficients α et β par analyse dimensionnelle.
2. Déterminez la vitesse V pour $z = 200 \text{ km}$

EXERCICE 5 : Oscillation d'une masse (★ ★ ★)

Un système ponctuel de masse m est attachée à un ressort horizontal de constante de raideur $k = 5 \text{ N m}^{-1}$. À l'instant initial, on écarte légèrement la masse de sa position d'équilibre et on observe quelques oscillations.

1. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, donner une expression valide pour la fréquence des oscillations de la masse.
2. On mesure 100 oscillations en 63 secondes pour une masse de 50 g. En déduire la valeur de la constante multiplicative.

EXERCICE 6 : Explosion atomique (★ ★ ★)

Dans cet exercice, on se propose de reprendre la démarche entreprise par le physicien G.I. Taylor, qui parvint, à partir du film de la première explosion atomique, à estimer l'ordre de grandeur de l'énergie de cette bombe, valeur qui était à cette époque top-secrète!

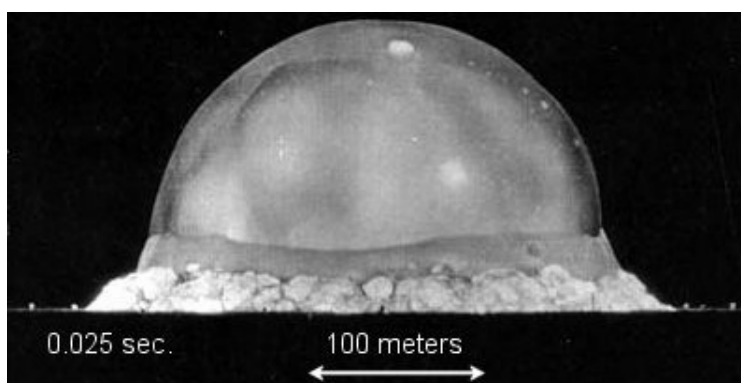


FIGURE 1 – Photographie de l'explosion

Taylor fit l'hypothèse que le rayon $R(t)$ du nuage consécutif à l'explosion ne dépend que de l'énergie E libérée par l'explosion et de la masse volumique $\mu \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$ de l'air.

1. Déterminer l'expression de $R(t)$ à une constante multiplicative K près.
A priori, si les paramètres sont correctement choisis, la constante K est de l'ordre de l'unité.
2. À l'aide de la photographie de la Figure 1 et des informations fournies, estimer l'ordre de grandeur de l'énergie de cette bombe en joules.
3. La comparer à la valeur de 21 kilo-tonnes de TNT que l'on trouve dans les archives historiques.
1 tonne de TNT est équivalente à 4,1865 GJ.

Complément

À l'aide des photographies aériennes prises lors de l'explosion, on peut dresser le tableau de valeurs suivant :

Temps (ms)	0,1	0,24	0,38	0,52	0,66	0,8	0,94	1,08	1,22	1,36	1,5
Rayon (m)	11	14,5	28,5	29,5	33,5	35,5	37	40,5	43	43,5	46,5

TABLE 1 – Rayon du nuage en fonction du temps, pendant les premiers instants après l'explosion
À l'aide des données numériques du tableau 1, vérifier graphiquement la validité de la loi déterminée à la première question.