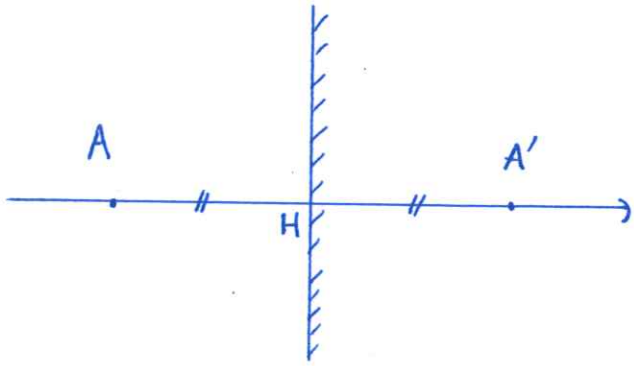
TD2 Application de l'opt. géo

Exercice 1 : Déplacement de miroir



1. Nous savons que pour un miroir : $\overline{AH} = -\overline{A'H}$

Si $\overline{AH}$ augmente de d,
alors $\overline{A'H}$ augmente également de d

Ainsi $\overline{AA'}$ augmente de $2d$.

Remarque : Si l'on veut rédiger "mathématiquement" : notons H_1 la position du miroir avant déplacement et H_2 la position après, de même que A'_1 la position de l'image de A avant déplacement, et A'_2 après :

Avant déplacement : $\overline{AH_1} = -\overline{A'_1H_1}$

Après déplacement : $\overline{AH_2} = \overline{AH_1} + d$ (d algébrique)

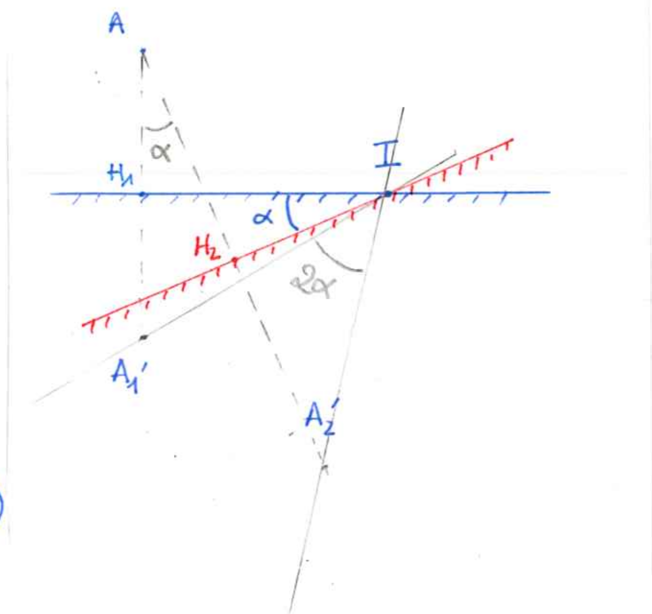
donc $\overline{A'_2H_2} = -\overline{AH_2} = -\overline{AH_1} - d$

D'où $\overline{AA'_2} = \overline{AH_2} + \overline{H_2A'_2} = \overline{AH_1} + d + (-\overline{A'_2H_2})$ et $\overline{AA'_1} = 2\times\overline{AH_1}$

$= \overline{AH_1} + d + (\overline{AH_1} + d)$

$= \overline{AA'_1} + \underline{\underline{2d}}$

2. Soit I le point indiquant l'axe de rotation du miroir. Exprimons $\widehat{A'_1IA'_2}$



⊗ Utilisons les angles :

$\widehat{A'_1IA'_2} = \widehat{A'_1IH_1} + \widehat{H_1IH_2} + \widehat{H_2IA'_2}$

Or par symétrie : $\widehat{A'_1IH_1} = -\widehat{AIH_1}$

$\widehat{A'_2IH_2} = -\widehat{AIH_2}$

et $\widehat{A'_1IH_1} + \widehat{H_2IA'_2} = -\widehat{AIH_1} + \widehat{AIH_2}$

$= \alpha$ (définition de la rotation)

et $\widehat{H_1IH_2} = \alpha$

D'où $\widehat{A'_1IA'_2} = 2\alpha$

* Utilisons une autre méthode

Comme I est sur la médiatrice de $[AA_1']$, $AI = A_1'I$
Comme I ——————————————— $[AA_2']$, $AI = A_2'I$

Donc A, A_1' et A_2' appartiennent à un cercle de centre I et de rayon AI.

Or comme $\widehat{A_1'AA_2'} = \alpha$, par propriété du cercle : $\widehat{A_1'IA_2'} = 2 \times \widehat{A_1'AA_2'} = 2\alpha$

L'image tourne d'un angle $\underline{2\alpha}$.

Exercice 2 : Lentilles accolées

Afin de mieux comprendre l'énoncé, revenons aux définitions.
La distance focale, c'est la distance $\overline{OF'}$, où F' est défini comme le pt où convergent les rayons incidents sur le système parallèles à l'axe optique.

On peut écrire cela : $\infty \xrightarrow{(S)} F'$

Or ici, (S) est composé de deux lentilles, donc :

$$\infty \underbrace{\xrightarrow{L_1} ? \xrightarrow{L_2}}_{(S)} F'$$

Nous savons déjà le point image "intermédiaire" (représenté par ? dans la chaîne de conjugaison), car par définition, L_1 conjugue des rayons venant de l'infini avec le point F_1', foyer image principale de L_1 :

$$\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$$

Finalement, écrivons la relation de Descartes pour la seconde lentille. Ici, l'objet est F_1' et l'image le pt F' à déterminer.

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \qquad \text{or } \overline{O_2F_1'} = \overline{O_1F_1'} = f_1'$$

$$\text{D'où } \frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{f'}$$

Deux lentilles accolées sont équivalentes à une lentille dont la vergence est la somme des vergences des deux lentilles.

A.N : $f' = \dfrac{f_1'f_2'}{f_1'+f_2'} = \dfrac{-8 \times 12}{12-8} = -24$ cm

Exercice 3 : image par une lentille convergente

1. Utilisons la relation de Descartes :

⚠ Même si ce n'est pas demandé, faites un schéma au brouillon !

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{f'\,\overline{OA}}{f'+\overline{OA}}$$

Ici $\overline{OA}<0$, avec $|\overline{OA}| = D$

Donc $f'+\overline{OA} < 0$ et $f'\cdot\overline{OA} < 0 \Rightarrow \overline{OA'} > 0$

↳ l'image sera réelle !

et $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AB}$

<u>AN</u> : $\overline{OA'} = \frac{20\times(-30)}{20-30} = +60\,\text{cm}$

$\overline{A'B'} = \frac{60}{-30}\cdot 5 = -10\,\text{cm}$ (l'image est inversée)

2. Utilisons la relation de Newton :

$$\overline{FA}\cdot\overline{F'A'} = -f'^2 \Rightarrow \overline{F'A'} = -\frac{f'^2}{\overline{FA}}$$

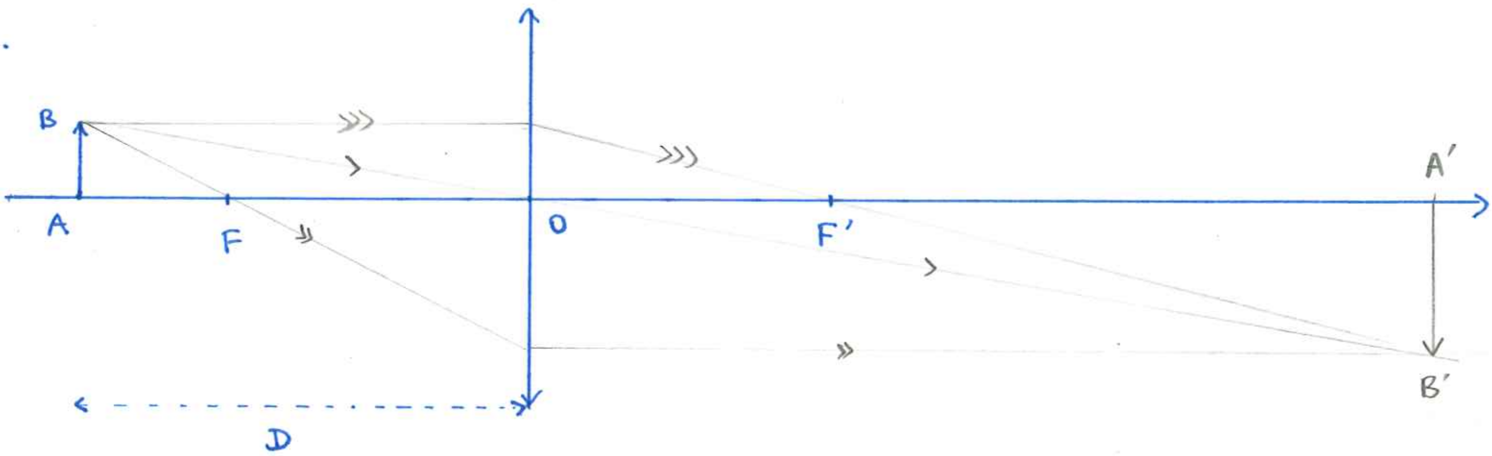
et $\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A'B'} = -\frac{f}{\overline{FA}}\cdot\overline{AB}$

$60 = 20 + 40$

<u>AN</u> : $\overline{F'A'} = -\frac{f'^2}{-D+f'} = -\frac{20^2}{-30+20} = 40\,\text{cm}$ (on trouve bien $\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = f' + \overline{F'A'}$)

$\overline{A'B'} = -\frac{-20}{-30+20}\cdot 5 = -10\,\text{cm}$

3.



4. Supposons que $\overline{OA} = D > 0$

Reprenons la question 1. en changeant le signe de $\overline{OA}$!

<u>AN</u> : $\overline{OA'} = \frac{20\times 30}{20+30} = 12\,\text{cm}$ → l'image est réelle !

$\overline{A'B'} = \frac{12}{30}\times 5 = 2\,\text{cm}$ → l'image n'est plus renversée.

Exercice 4 : système afocal

1. Écrivons une chaîne de conjugaison pour le système global : $\infty \xrightarrow{(S)} \infty$

Par définition d'un système afocal, il conjugue "l'infini en l'infini".

Détaillons cela : $\underbrace{\infty \xrightarrow{L_1} ? \xrightarrow{L_2} \infty}_{(S)}$

Par définition, L_1 conjugue un objet à l'infini avec son foyer image principal F_1'.

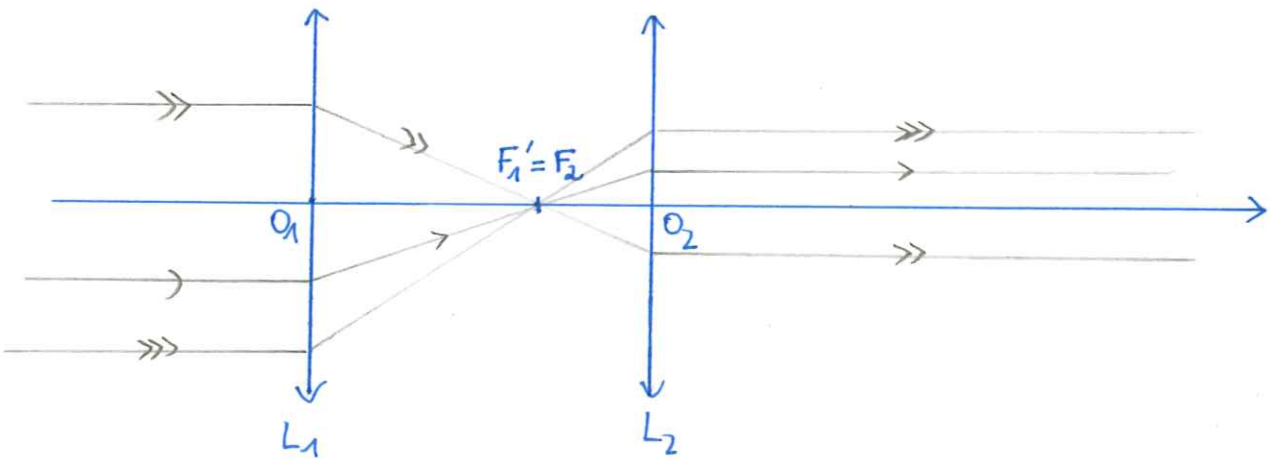
Donc $? = F_1'$

Or pour que l'image par L_2 soit à l'infini, il faut que l'objet soit au foyer objet F_2.

Donc $? = F_2$

Ainsi pour que le système soit afocal, il faut que $F_1' = F_2$

2.



Exercice 5 : Construction de rayons

1. Objet avant F → Image réelle après F'

Objet entre F et O → Image virtuelle

Objet après O → Image réelle entre O et F'

Ex de raisonnement :

$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$

comme $\overline{FA} < 0$ et $f < 0$, $f' > 0$

$\Rightarrow \overline{F'A'} > 0$ (A' après F')

2. Objet avant O → Image virtuelle entre O et F'

Objet entre O et F → Image réelle

Objet après F → Image virtuelle avant F'

Ex de raisonnement :

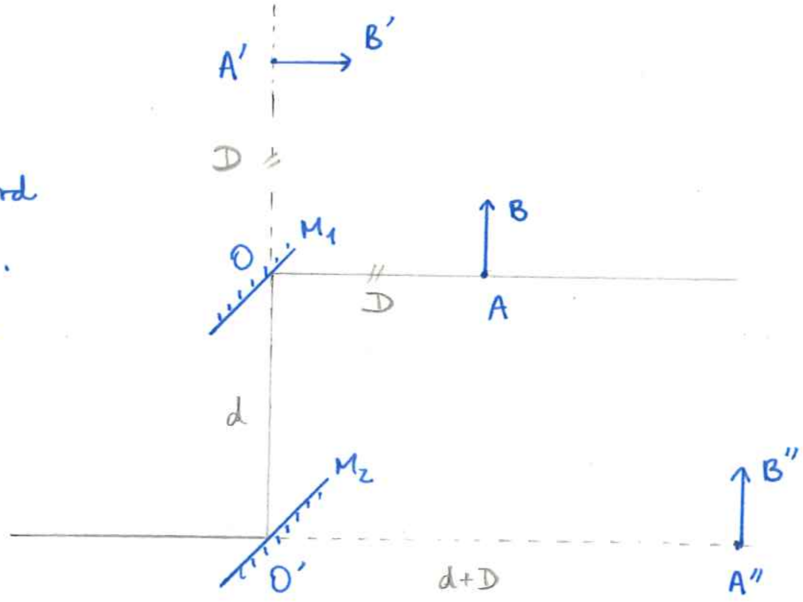
$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$

comme $\overline{OA} < 0$ (et $\overline{FA} < 0$) et $f > 0$, $f' < 0$

$\Rightarrow \overline{F'A'} > 0$ et $\overline{OA'} < 0$

(A' entre F' et O)

Exercice 6 : Périscope



1. Pour construire A''B'', on construit d'abord A'B' l'image de AB par le miroir M_1. Nous savons que $OA = OA'$ et que le grandissement est égal à 1.

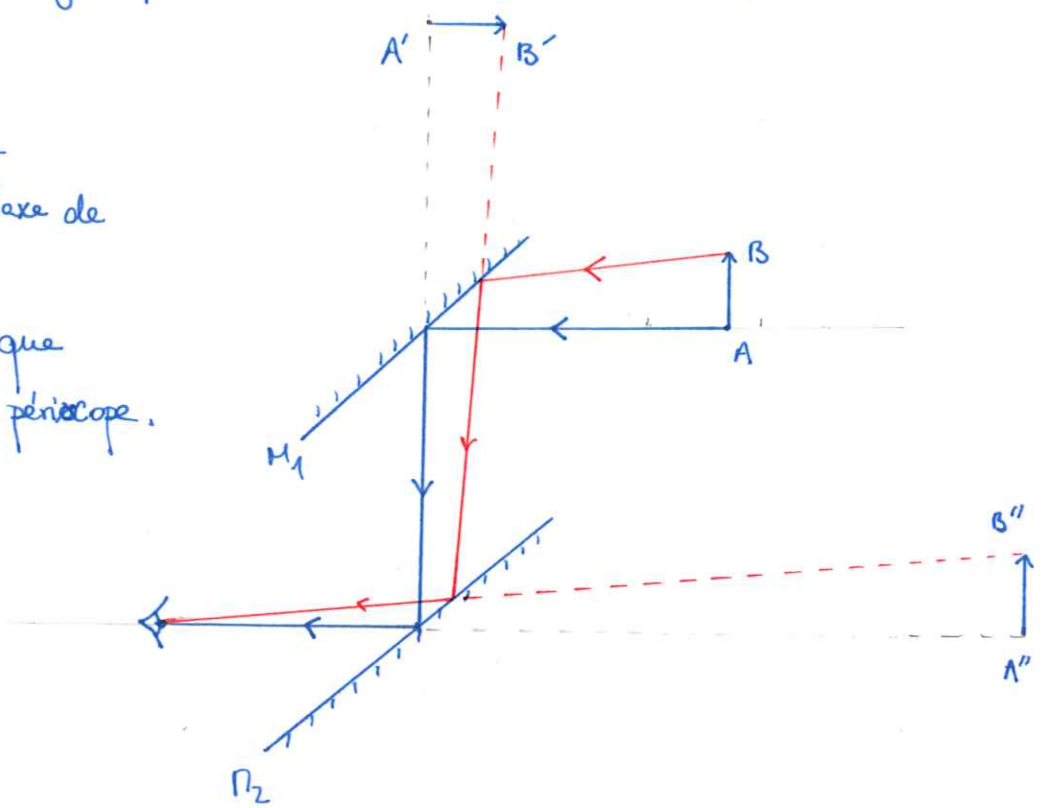
Ensuite, on réalise le même type construction pour A''B'', image de A'B' par le miroir M_2.

$$O'A' = O'A'' = d + D$$

et la longueur $A''B'' = A'B' = AB$

2. Comme le grandissement est de 1 par M_1 et de 1 par M_2, le grandissement global du système est 1.

3. Comme le miroir M_1 est stigmatique et le miroir M_2 également, le système global est également stigmatique.



4. Le rayon provenant de A est facile à tracer (A étant sur l'axe de l'œil).

Pour B, il faut se rappeler que l'œil voit l'image de B par le périscope. (il voit B'').

Commençons déjà par tracer le rayon de B'' vers l'œil.

Or le rayon issu de B'' est forcément issu de B' car B'' est l'image de B' par M_1

⇒ au niveau de M_2, le rayon semble provenir de B'

Avec un raisonnement similaire, vu que B' est l'image de B par M_1, le rayon provenant de B semble être issu de B' et inversement.

Exercice 7 : Images et objets virtuels ou réels

1. A est un objet pour L et (M+L)
   Par contre, A n'est pas un objet pour M car les rayons ne peuvent pas parvenir direct sur M.

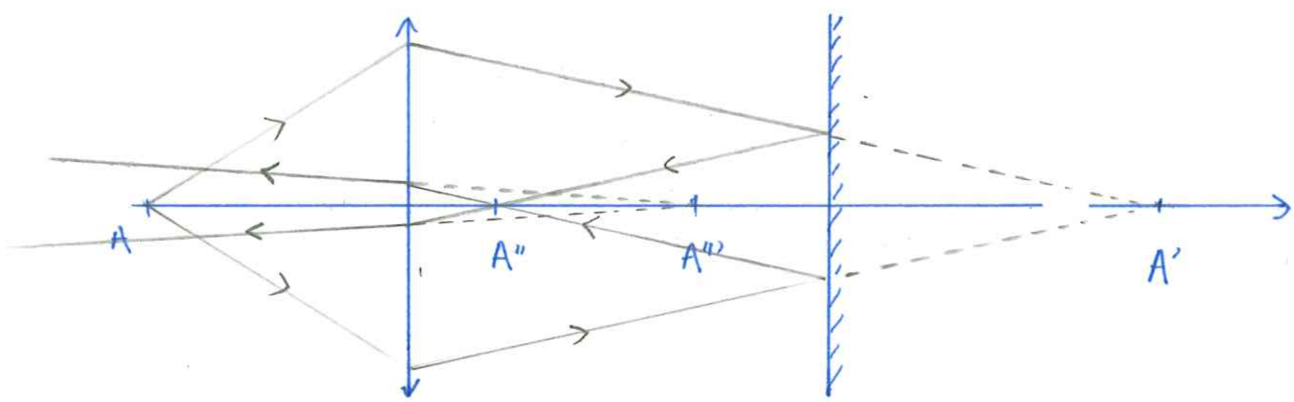
2. A' est une image pour L, objet pour M, n'est rien pour (L+M).

3. A' est une image réelle pour L, objet virtuel pour M.

4. A'' est une image réelle pour M, objet réel pour L.

5. A''' est une image virtuelle pour L.

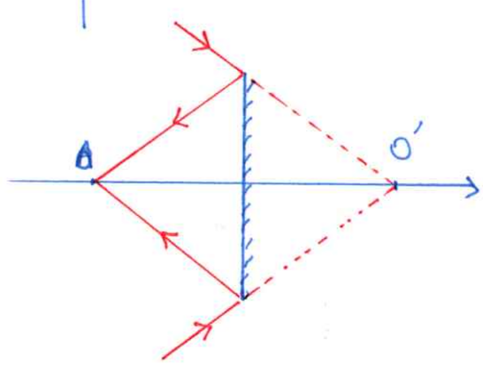
⚠ sens de propagation !



Exercice 8 : champ d'un miroir plan

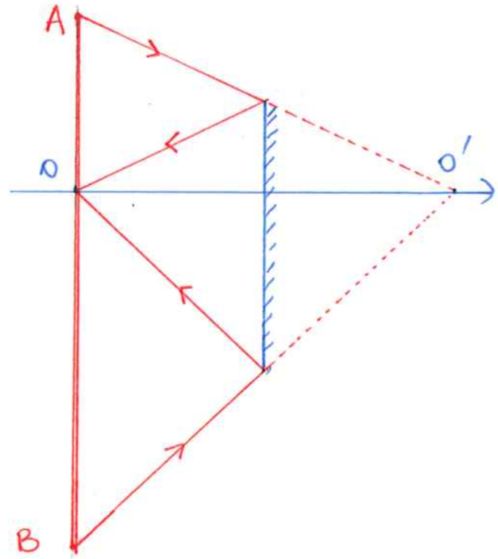
1. Un observateur dont l'oeil est en O peut voir un objet A si au moins un rayon issu de A parvient en O. Autrement dit, par principe de retour inverse de la lumière, il faut au moins un rayon issu de O et passant par M qui atteint A.
(ou issu de O', image de O par le miroir) de manière équivalente

Le champ de vision est donc un cône de sommet O' s'appuyant sur le miroir (M).



2. Il faut que l'homme soit entièrement dans son champ de vision.
   L'observateur AB doit donc être aux limites du champ de vision, de sommet O'.
   (où A et B sont les extrémités du corps)

Comme représenté dans le schéma ci-contre, ABO' est un triangle, et le miroir est parallèle à (AB), médiatrice de [OO'].



D'après le théorème de Thalès, on trouve $\boxed{L = \frac{H}{2}}$

et ce indépendamment de la position de la personne par rapport au miroir.

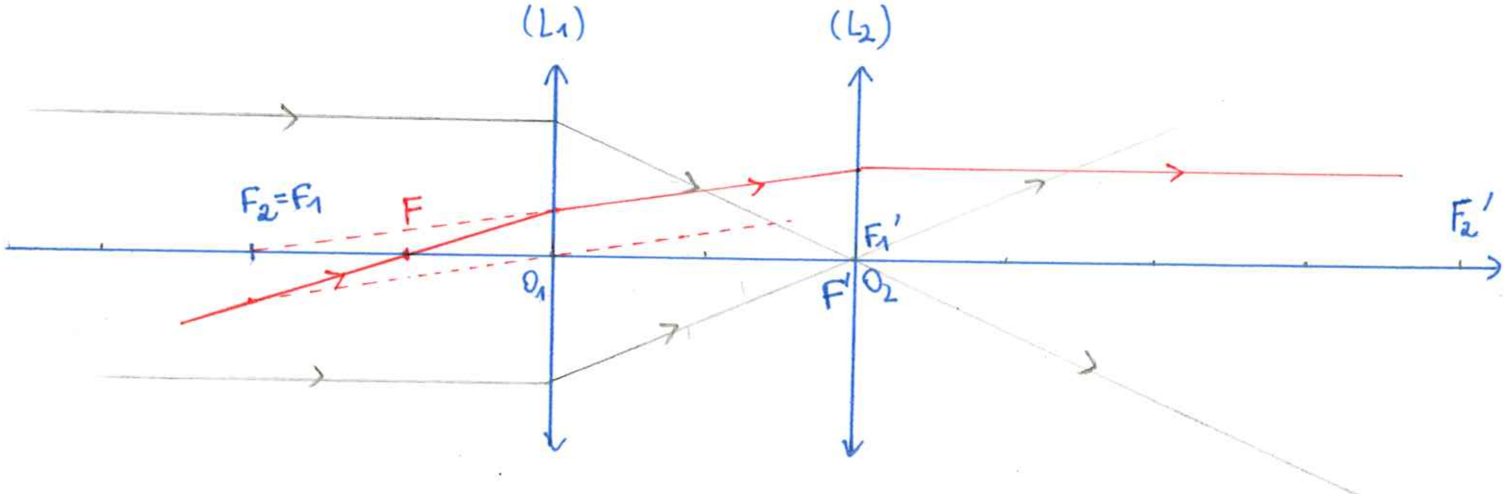
On voit d'après le schéma qu'il faut que le miroir soit à une hauteur $h = \frac{OB}{2}$ du sol

Comme $OB = H - OA$ et $OA = 10$ cm d'après l'énoncé, on peut déterminer h.

<u>AN</u>: $L = \frac{1{,}80}{2} = 90$ cm

$h = \frac{180-10}{2} = 85$ cm.

Exercice 9 : système à deux lentilles



1. On trace un rayon parallèle à l'axe optique, et l'on cherche à construire le pt F' vers lequel il converge sur l'axe optique après la lentille L_2.

→ au niveau de la lentille (L_1), les rayon convergent vers F_1'

→ comme ces rayons arrivent sur (L_2) en O_2, ils ne sont pas déviés après (L_2)

Ainsi, le point de convergence après le système $(L_1 + L_2)$ est le point O_2, qui correspond au foyer image principal F'.

2\. Écrivons une chaîne de conjugaison : $\infty \xrightarrow{(L_1)} F_1' \xrightarrow{(L_2)} F'$

En écrivant la relation de Descartes pour la conjugaison de F_1' et F', on obtient :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{f_2'\,\overline{O_2F_1'}}{\overline{O_2F_1'} + f_2'} \quad \text{or } \overline{O_2F_1'} = 0$$

donc $\overline{O_2F'} = 0$

3\. Pour déterminer F, on trace rayon provenant de l'infini, parallèle à l'axe optique. Par retour inverse de la lumière, on sait que ce rayon provient donc du point F_2. Au niveau de la lentille (L_1), il faut alors construire l'objet conjugué à F_2. On trouve alors F, le point vers lequel converge le rayon sur l'axe optique.

4\. Écrivons la chaîne de conjugaison : $F \xrightarrow{(L_1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$

En écrivant la relation de Descartes pour la conjugaison de F et F_2, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \overline{O_1F} = \frac{\overline{O_1F_2} \cdot f_1'}{f_1' - \overline{O_1F_2}} = \frac{(-2a)\cdot(2a)}{(2a)-(-2a)} = -\frac{4a^2}{4a} = -a$$

on retrouve bien la position obtenue par construction.

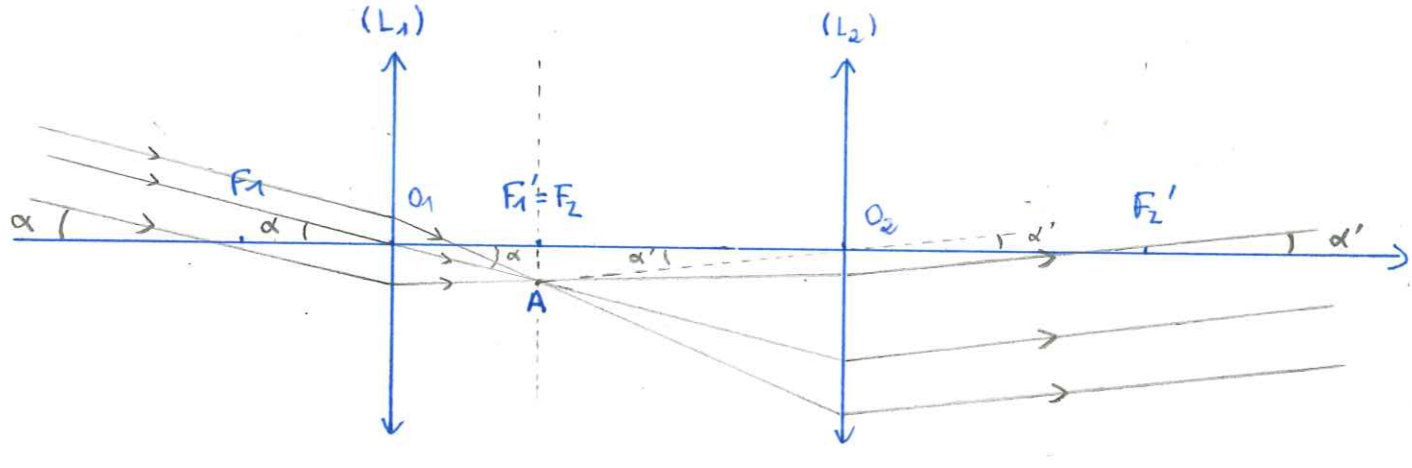
5\. Si $e = 6a$, on se retrouve dans la situation où $F_1' = F_2$ (faire un schéma si besoin)

Donc d'après la chaîne de conjugaison : $\infty \xrightarrow{(L_1)} F_1' = F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$

Le foyer principal image est à l'infini, et de même que le foyer principal objet.

6\. Il s'agit d'un système afocal.

7\.



Exprimons α'.

Appelons A le point correspond au foyer image vers lequel convergent les rayons parallèles incidents avec un angle α.

Dans le triangle O_1AF_1', $\tan\alpha = \dfrac{F_1'A}{f_1'}$

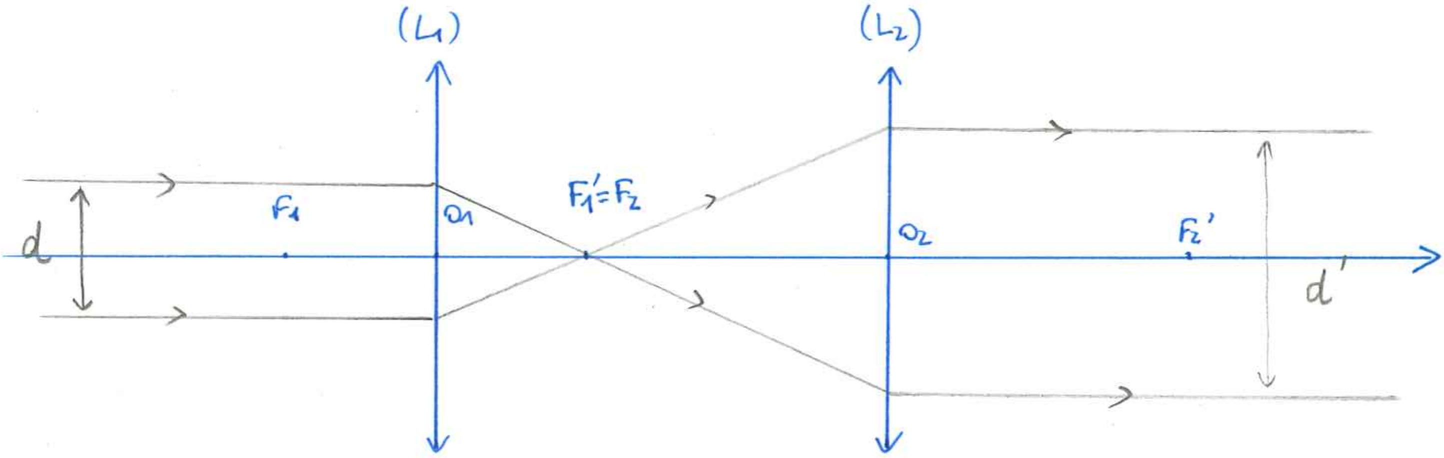
Dans le triangle O_2AF_1', $\tan\alpha' = \dfrac{F_1'A}{f_2'}$

Or, travaillant dans les conditions de Gauss, $\tan\alpha \simeq \alpha$ et $\tan\alpha' \simeq \alpha'$

D'où $\alpha' = \dfrac{F_1'A}{f_2'} = \dfrac{f_1'}{f_2'}\alpha$ L'image en sortie est à l'infini, avec une taille angulaire $\frac{\alpha}{2}$.

Le grossissement du système est $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{f_1'}{f_2'} = \dfrac{1}{2}$

8.



Déterminons d'.

Dans la zone entre (L_1) et (L_2), on applique le théorème de Thalès.

$$\frac{d}{d'} = \frac{f_1'}{f_2'} \Rightarrow d' = \frac{f_2'}{f_1'}d = 2d$$

Le faisceau ressort parallèle à l'axe optique, avec un diamètre de $d' = 2d$.

Exercice 10 : Oculaire de Ramsden

1. • Déterminons F :

Écrivons une chaîne de conjugaison : $F \xrightarrow{(L_1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$

D'après la relation de Descartes pour la conjugaison de F et F_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{O_1F} = \frac{f' \cdot \overline{O_1F_2}}{f' - \overline{O_1F_2}}$$

or $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$ (relation de Chasles)

$$= e + (-f') \qquad \Delta\ f = -f'$$

$$= \frac{2f'}{3} - f' = -\frac{f'}{3}$$

D'où $\overline{O_1F} = \dfrac{f' \cdot (-\frac{f'}{3})}{f' - (-\frac{f'}{3})} = -\dfrac{f'}{4}$

• Déterminons la position de F' :

Écrivons la chaîne de conjugaison : $\infty \xrightarrow{(L_1)} F_1' \xrightarrow{(L_2)} F'$

D'après la relation de Descartes pour la conjugaison de F_1' et F' :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{f' \cdot \overline{O_2F_1'}}{f' + \overline{O_2F_1'}}$$

or $\overline{O_2F_1'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'}$ (relation de Chasles) $\quad \overline{O_2O_1} = -\overline{O_1O_2}$

$$= -e + f'$$

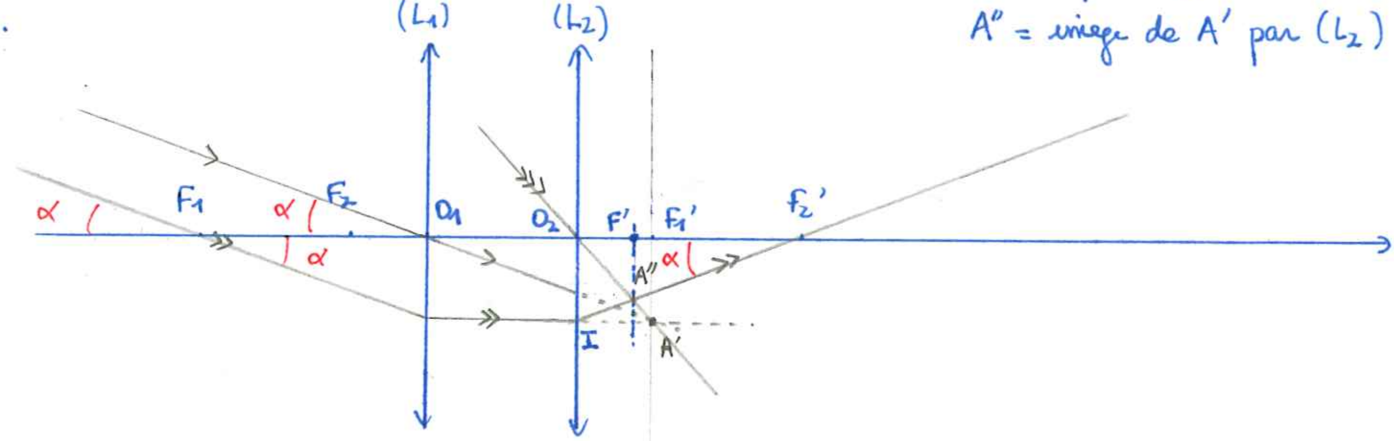
$$= -\frac{2f'}{3} + f' = \frac{f'}{3}$$

D'où $\overline{O_2F'} = \dfrac{f' \cdot f'/3}{f' + f'/3} = \dfrac{f'}{4}$

2.

A' = image de l'objet à l'infini par (L_1)

A'' = image de A' par (L_2)



Comme l'objet est à l'infini, on sait que l'image par le système sera dans le plan focal image du système. L'abscisse de A'' est donnée par $\overline{O_2F'}$.

Pour déterminer l'ordonnée de A'' (autrement la distance à l'axe optique), on s'intéresse au rayon ↠ (issu de F_1).

Dans le triangle $O_2F_2'I$, on peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{F'A''}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{F'F_2'}}{\overline{O_2F_2'}}$$

$$\Rightarrow \overline{F'A''} = \frac{\overline{F'F_2'}}{\overline{O_2F_2'}} \cdot \overline{O_2I}$$

or $\overline{O_2F_2'} = f'$

$\overline{F'F_2'} = \overline{F'O_2} + \overline{O_2F_2'}$ (relation de Chasles)

$= -\overline{O_2F'} + \overline{O_2F_2'}$

$= -\frac{f'}{4} + f' = \frac{3f'}{4}$

et $\tan\alpha = \frac{O_2I}{O_2F_2'}$ et $\tan\alpha \simeq \alpha$

D'où $\overline{O_2I} = -\alpha f'$ car $\overline{O_2I}$ est négatif.

Enfin $\overline{F'A''} = -\frac{3\alpha f'}{4}$

3. Utilisons les relation de conjugaison uniquement.

* l'abscisse de A'' est donnée par $\overline{O_2F'}$ (on l'a déjà calculé question 1).
* l'ordonnée de A'' peut être obtenue grâce aux formules de grandissement.

par la lentille L_2, le grandissement est donné par $\gamma = \frac{\overline{O_2F'}}{\overline{O_2F_1'}}$

(l'image par (L_1) est en F_1', qui correspond donc à l'objet pour (L_2)).

or $\overline{O_2F'} = \frac{f'}{4}$ et $\overline{O_2F_1'} = \frac{f'}{3}$, donc $\gamma = \frac{3}{4}$

cf qu° 1.

Par définition, $\gamma = \frac{\overline{F'A''}}{\overline{F_1'A'}}$ et comme $\overline{F_1'A'} = -\alpha f'$ regarder le triangle $O_1F_1'A'$

on obtient $\overline{F'A''} = \gamma\, \overline{F_1'A'} = -\frac{3\alpha f'}{4}$

On retrouve bien le même résultat.

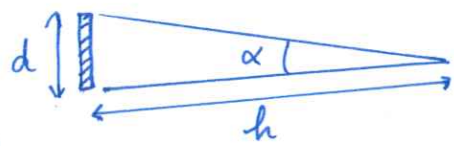
Exercice 11 : Grande Muraille de Chine

La distance caractéristique de la Grande Muraille à prendre en compte n'est pas sa longueur mais sa largeur. Vu la photo, on peut estimer un ordre de grandeur de cette largeur à $d \sim 10\,m$.

La résolution de l'oeil est $\alpha_0 = 1'$ d'arc $= \frac{1}{60}^\circ = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \simeq \frac{1}{3600}$ rad

(on travaille sur les ordres de grandeur).

À une hauteur h, un objet de taille d est vu avec un angle $\alpha \simeq \frac{d}{h}$ $(\tan\alpha \simeq \alpha)$



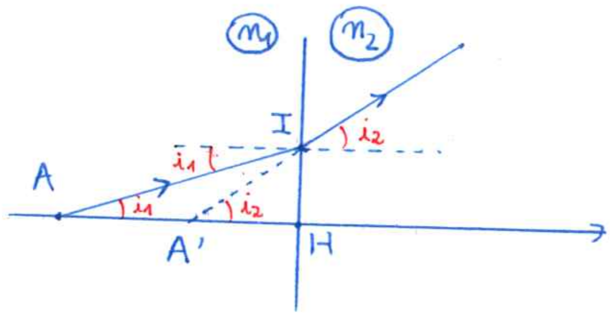
Pour que la Grande Muraille soit résolue à l'oeil nu, il faut $\alpha > \alpha_0 \Rightarrow \frac{d}{h} > \alpha_0$

$$\Rightarrow h < \frac{d}{\alpha_0} = 10 \times 3600 \simeq 36\,km$$

Cette hauteur est très inférieure à la distance Terre-Lune ($\sim 400\,000\,km$).

Exercice 12 : Comme un gros-petit poisson dans l'eau

<u>Préliminaire</u> : image par un dioptre plan



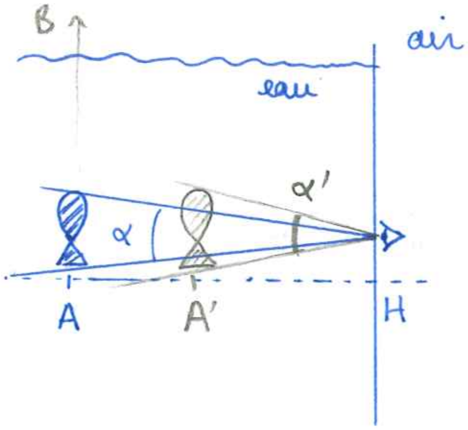
Soit un objet A. Traçons un rayon issu de A. Au niveau du dioptre, le rayon est réfracté. Il semble alors provenir d'un point A'. A' est donc l'image de A par le dioptre.

- La loi de Snell-Descartes s'écrit : $n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$

  or dans les conditions de Gauss : $\sin i_1 \simeq i_1$ et $\sin i_2 \simeq i_2$, d'où : $n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2$
- De plus : dans AIH : $\tan i_1 = \frac{\overline{IH}}{\overline{AH}}$, dans A'IH : $\tan i_2 = \frac{\overline{IH}}{\overline{A'H}}$

  donc $\tan i_1 \cdot \overline{AH} = \tan i_2 \cdot \overline{A'H}$ or dans les conditions de Gauss : $\tan i_1 \simeq i_1$ et $\tan i_2 \simeq i_2$

D'où $$\boxed{\frac{\overline{A'H}}{n_2} = \frac{\overline{AH}}{n_1}}$$



Dans l'aquarium, le poisson apparaît plus près de l'observateur qu'il ne l'est réellement.

Si d est la taille réelle du poisson, il apparaît sous un angle $\alpha' = \frac{d}{A'H}$ alors que le sortant de l'eau en B, il apparaît sous l'angle $\alpha = \frac{d}{AH}$

Dans l'eau, il apparait grossi de $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n_{eau}}{n_{air}} = 1,33$

(d'environ 30%)

Rq: cette analyse dépend en réalité de façon critique des différentes distances prises en compte.